Techniki projektowania algorytmów

- Dziel i zwyciężaj (*divide and conquer*) – rekursja
- Redukcja (*reduction, transform and conquer*)
- Programowanie liniowe (*linear programming*)
- Programowanie zachłanne (*greedy method*)
- Programowanie dynamiczne (*dynamic programming*)
- Algorytmy przeszukujące (*trial and error*)
- Algorytmy probabilistyczne i heurystyki (*probabilistic, heuristic*)

Rekursja

- Rekursja – zobacz: **Rekursja** ;-)
- Rekursja – jeśli ciągle nie wiesz co to jest, zobacz: **Rekursja** ;-)
- PHP – „PHP: Hypertext Preprocessor”
- GNU – „GNU's Not Unix”
- AMARA – „Amara Means A Recursive Acronym”

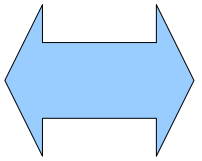
Rekursja

- P $\equiv$ IF B THEN **P**[S,P] END
  - P – program
  - **P** – kompozycja (złożenie)
  - S – sekwencja rozkazów nie zawierająca P
- Wieże Hanoi, algorytm Euklidesa znajdowania NWD, definicja drzewa – patrz „Matematyka dyskretna”
- „Dziel i zwyciężaj” - quicksort, mergesort

Kiedy nie używać rekursji?

- P ≡ IF B THEN S; P END
  (P na samym początku lub końcu)
- Silnia: n! = n * (n-1)! 0! = 1

```
PROCEDURE
F(I:INTEGER):INTEGER;
BEGIN
   IF I>0
   THEN
      RETURN I*F(I-1);
   ELSE
      RETURN 1;
   END;
END F;
```

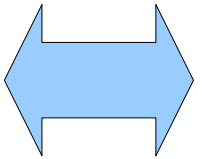


```
I := 0;
F := 1;
WHILE I < n DO
   I := I+1;
   F := I*F;
END;
```

Kiedy nie używać rekursji?

- Ciąg Fibonacciego: F(i) = F(i-1) + F(i-2)
- Powtarzamy niepotrzebnie wiele obliczeń

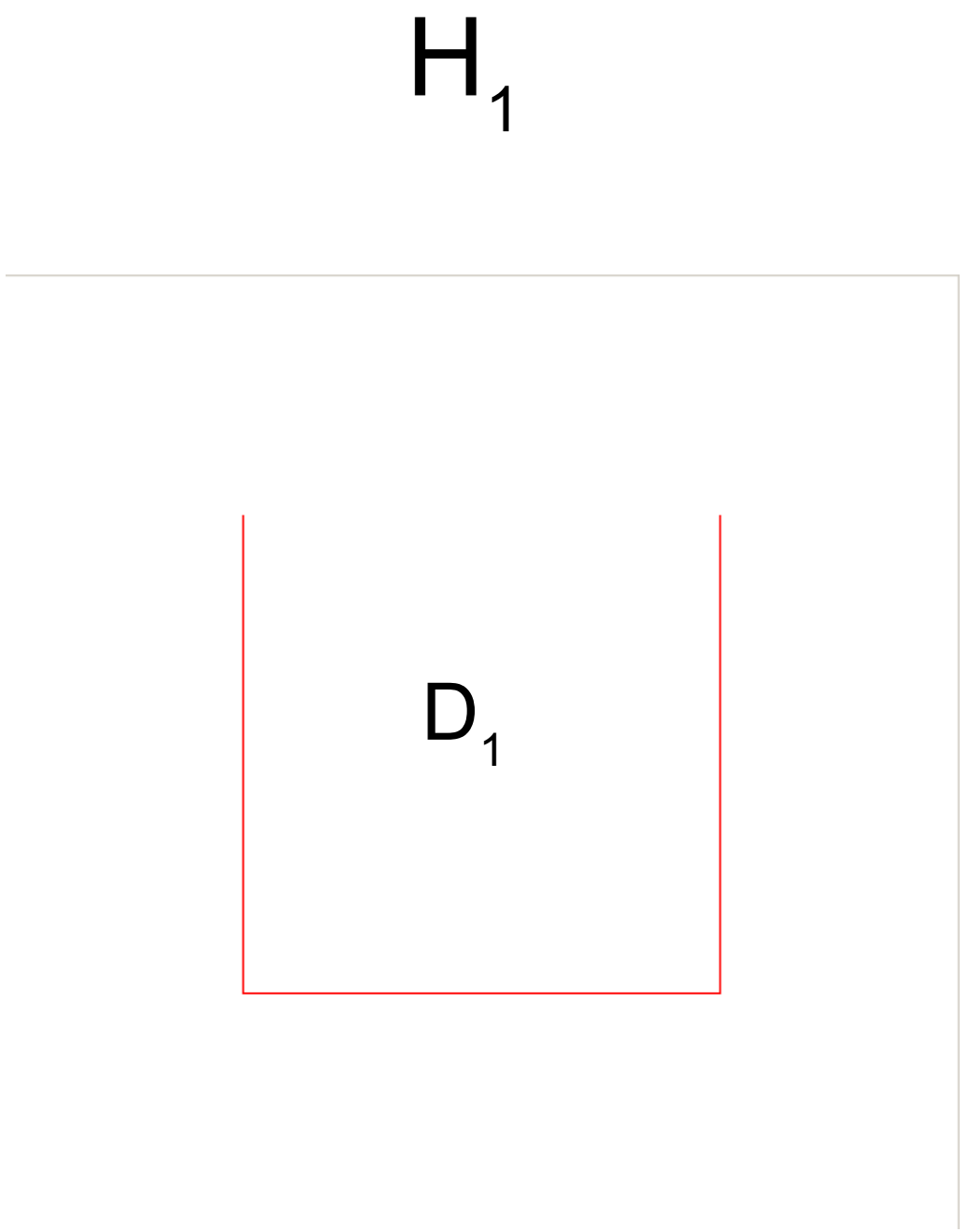
```
PROCEDURE F(n:INTEGER):
INTEGER;
BEGIN
IF n=0
   THEN RETURN 0;
   ELSE IF n=1
      THEN RETURN 1;
      ELSE
      RETURN F(n-1)+F(n-2)
   END;
END;
END F;
```



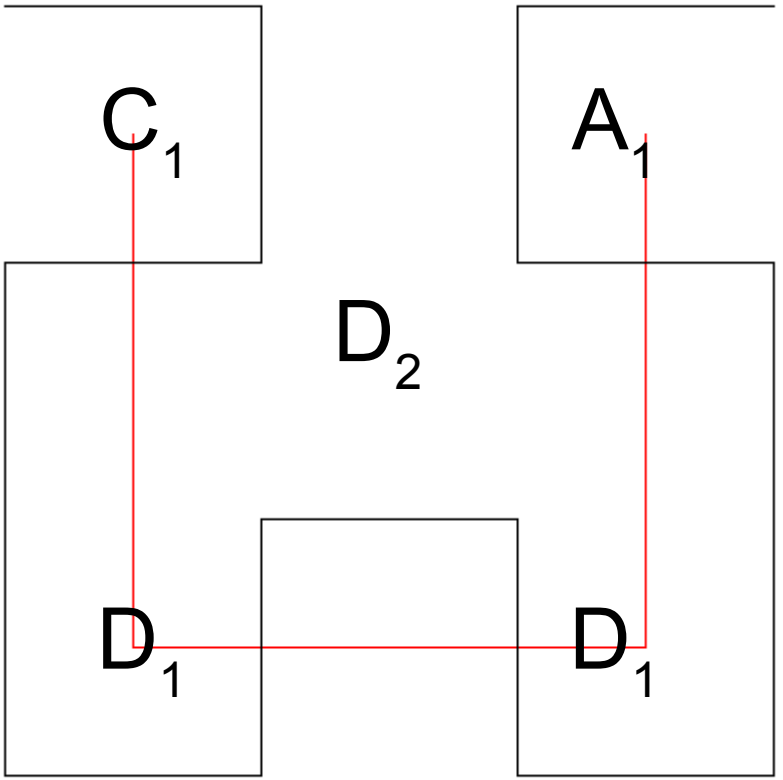
```
i := 1;
x := 1;
y := 0;
WHILE i < n DO
   x := x+y;
   y := x-y;
   i := i+1;
END;
```

Krzywa Hilberta (*Hilbert curve*)

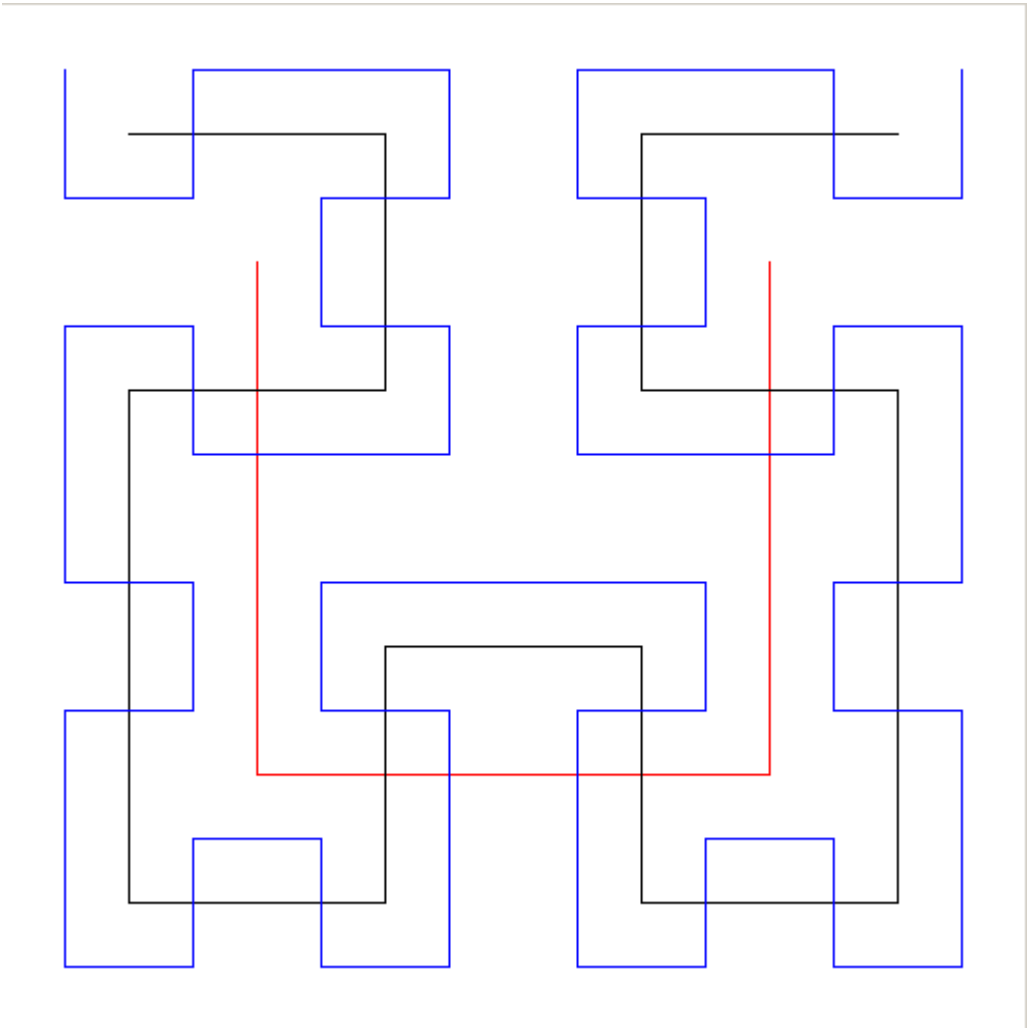
- Krzywa H_i rzędu i składa się z czterech instancji krzywych H_{i-1} dwukrotnie pomniejszonych, obróconych i połączonych odcinkami.
- H_0 jest pusta, stąd H_1 składa się tylko z trzech odcinków.
- A_i: $D_{i-1} \leftarrow A_{i-1} \downarrow A_{i-1} \rightarrow B_{i-1}$
- B_i: $C_{i-1} \uparrow B_{i-1} \rightarrow B_{i-1} \downarrow A_{i-1}$
- C_i: $B_{i-1} \rightarrow C_{i-1} \uparrow C_{i-1} \leftarrow D_{i-1}$
- D_i: $A_{i-1} \downarrow D_{i-1} \leftarrow D_{i-1} \uparrow C_{i-1}$


H_1
D_1

H_2



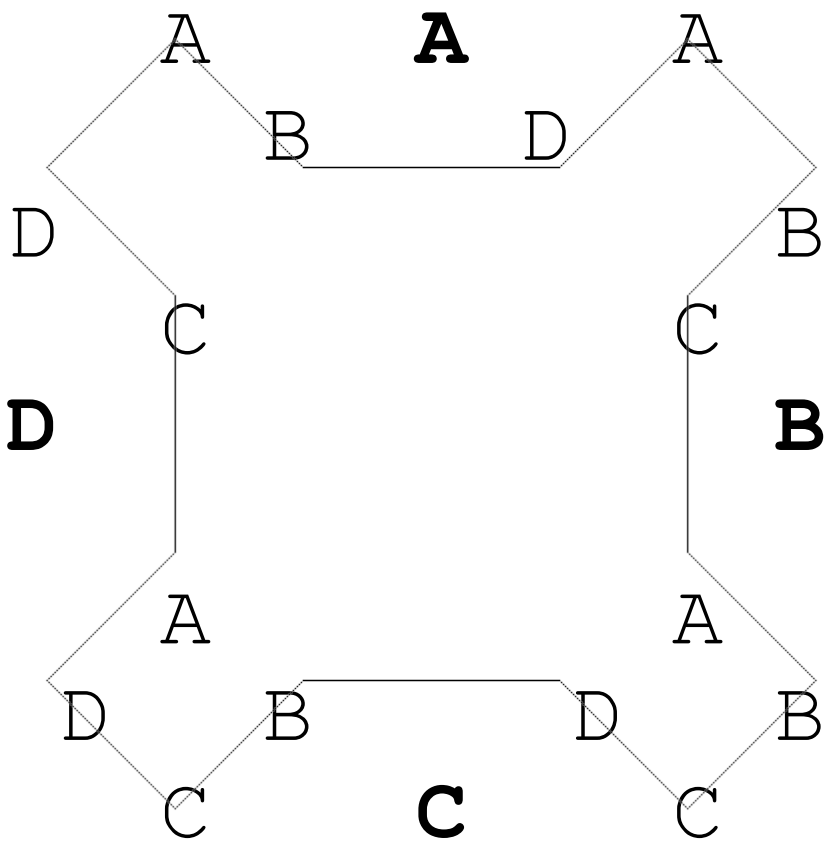
H_3



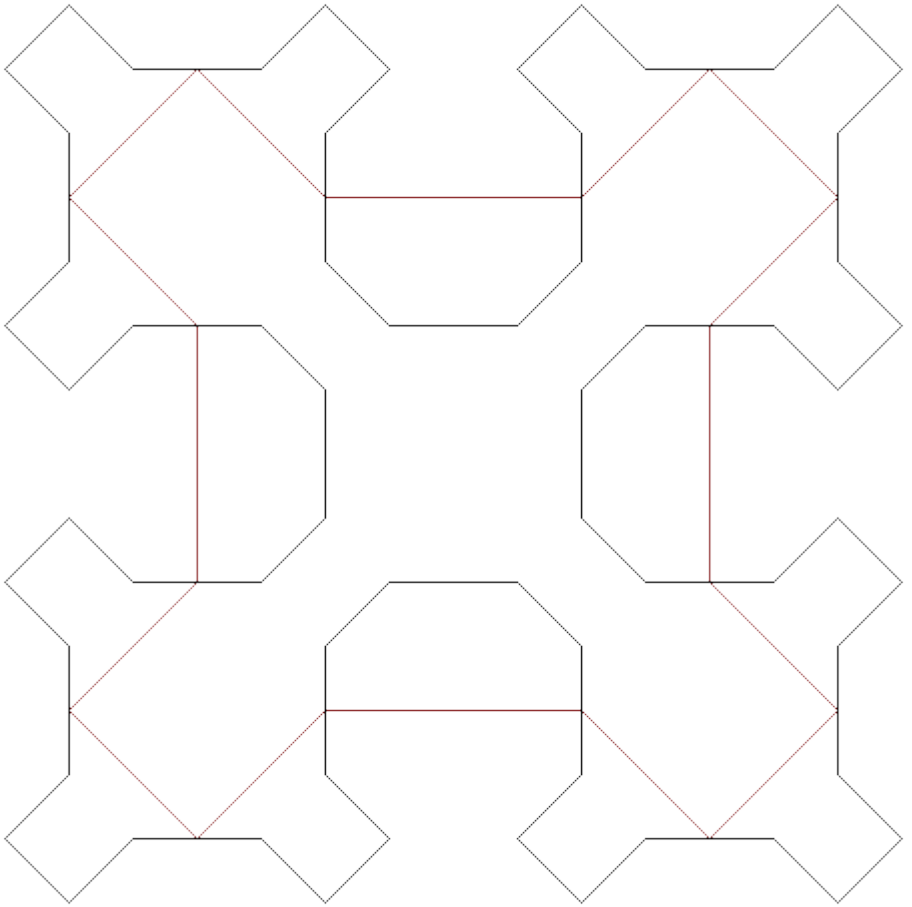
Krzywa Sierpińskiego

- Główny schemat różni się od schematów rekursji
- S_n: A_n ↘ B_n ↙ C_n ↖ D_n ↗
- A_i: A_{i-1} ↘ B_{i-1} ⇨ D_{i-1} ↗ A_{i-1}
- B_i: B_{i-1} ↙ C_{i-1} ⇩ A_{i-1} ↘ B_{i-1}
- C_i: C_{i-1} ↖ D_{i-1} ⇦ B_{i-1} ↙ C_{i-1}
- D_i: D_{i-1} ↗ A_{i-1} ⇧ C_{i-1} ↖ D_{i-1}
- S_0 – kwadrat obrócony o 45 stopni (A_0,B_0,C_0,D_0 są puste)

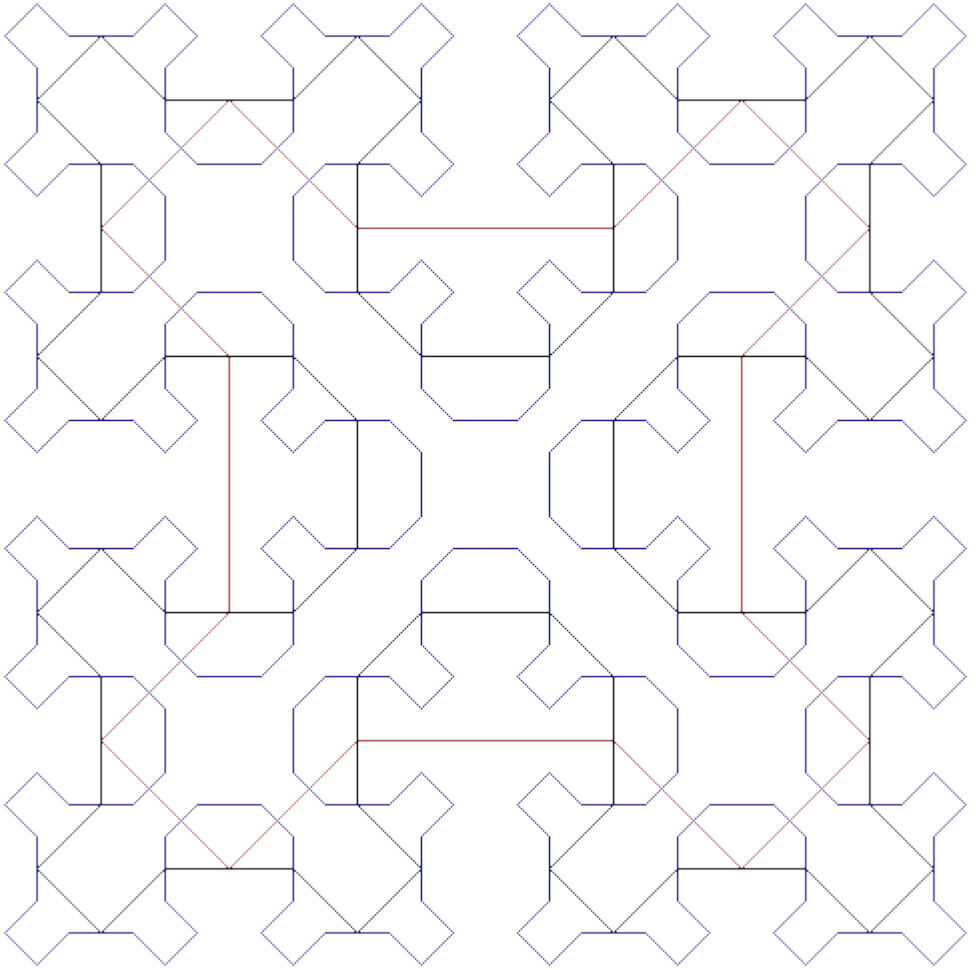
S_1



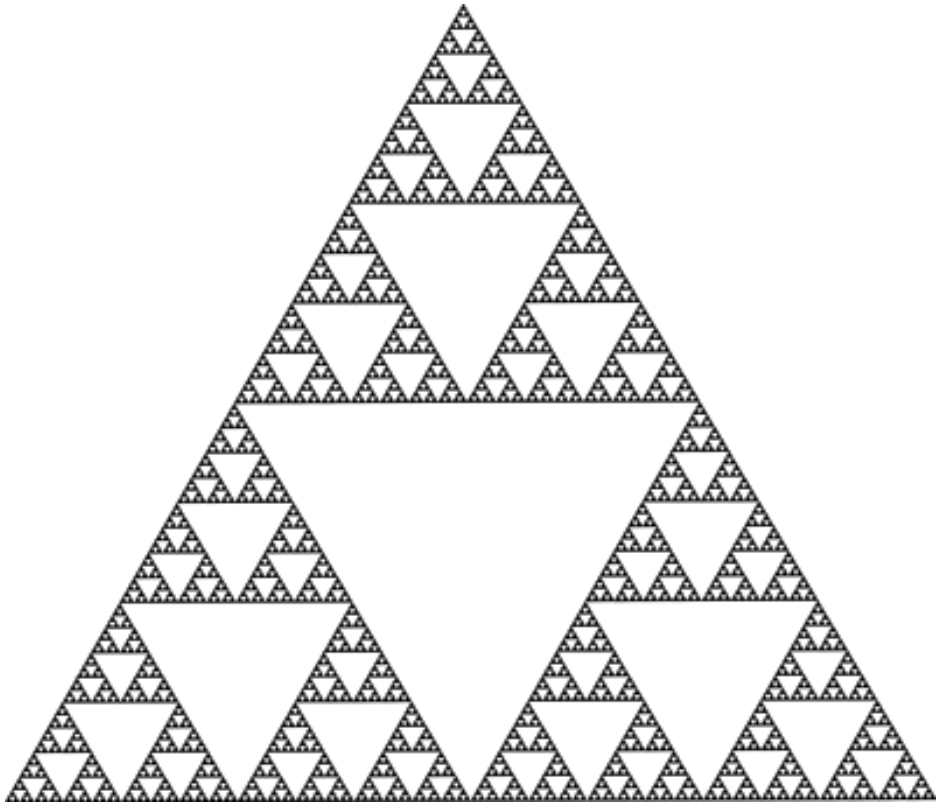
S_2



S_3

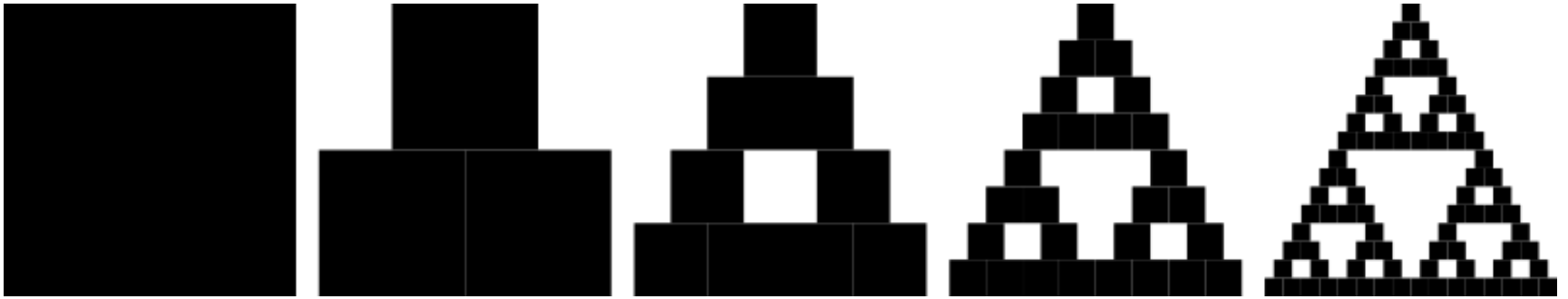


Trójkąt Sierpińskiego



- Weź dowolny kształt (zwykle trójkąt).
- Jeśli procedura osiągnęła założony poziom narysuj kształt. W przeciwnym przypadku zmniejsz rozmiar kształtu dwukrotnie. Wywołaj procedurę trzykrotnie na planie trójkąta.

Trójkąt Sierpińskiego



Redukcja (*reduction*)

- *transform and conquer* – „transformuj i zwyciężaj”
- np. zadanie znalezienia mediany w zbiorze liczb możemy rozwiązać następująco:
  - sortujemy zbiór (droga operacja)
  - wybieramy element środkowy (tania operacja)
- Chcemy pomnożyć dwie liczby. Mamy gotowe układy które potrafią: dodawać, odejmować, podnosić do kwadratu, dzielić przez 2.
- $a*b = ((a+b)^2 - a^2 - b^2)/2$

Programowanie liniowe (*linear programming*)

- Optymalizacja liniowej funkcji celu podlegającej liniowym ograniczeniom w postaci równości lub nierówności.
- Forma kanoniczna:

Maksymalizuj: $c^T x$
przy ograniczeniach: $Ax \leq b$
gdzie: $x \geq 0$
x – wektor zmiennych
c,b – wektory współczynników
A – macierz współczynników

- Forma standardowa składa się z trzech części:
  - liniowej funkcji celu, np. maksymalizuj $c_1x_1+c_2x_2$
  - ograniczeń, np. $a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$
    $a_{21}x_1+a_{22}x_2 \leq b_2$
    $a_{31}x_1+a_{32}x_2 \leq b_3$
  - nieujemnych zmiennych np. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$
- Ograniczenia inne niż mniejszościowe (≤) możemy zamienić na mniejszościowe:
  - ograniczenie równościowe na dwa ≤ i ≥
  - ograniczenie większościowe prze negację zmiennych.

Przykład

Rolnik ma pole o powierzchni A hektarów na którym może posadzić pszenicę lub jęczmień w dowolnej proporcji. Rolnik może zużyć maksymalnie F ton nawozu i P ton środka owadobójczego. Do uprawy pszenicy potrzeba F_1 a do jęczmienia F_2 ton nawozu na hektar. Do uprawy pszenicy potrzeba P_1 a do jęczmienia P_2 ton środka owadobójczego na hektar. Uprawa pszenicy daje S_1, a jęczmienia S_2 złotych z hektara. Ile hektarów ma rolnik obsadzić pszenicą, a ile jęczmieniem aby uzyskać maksymalny zysk?

Przykład

- maksymalizuj: $S_1x_1 + S_2x_2$ (funkcja celu = zysk)
- ograniczenia:

  $x_1 + x_2 \leq A$ (wielkość pola)

  $F_1x_1 + F_2x_2 \leq F$ (ilość nawozu)

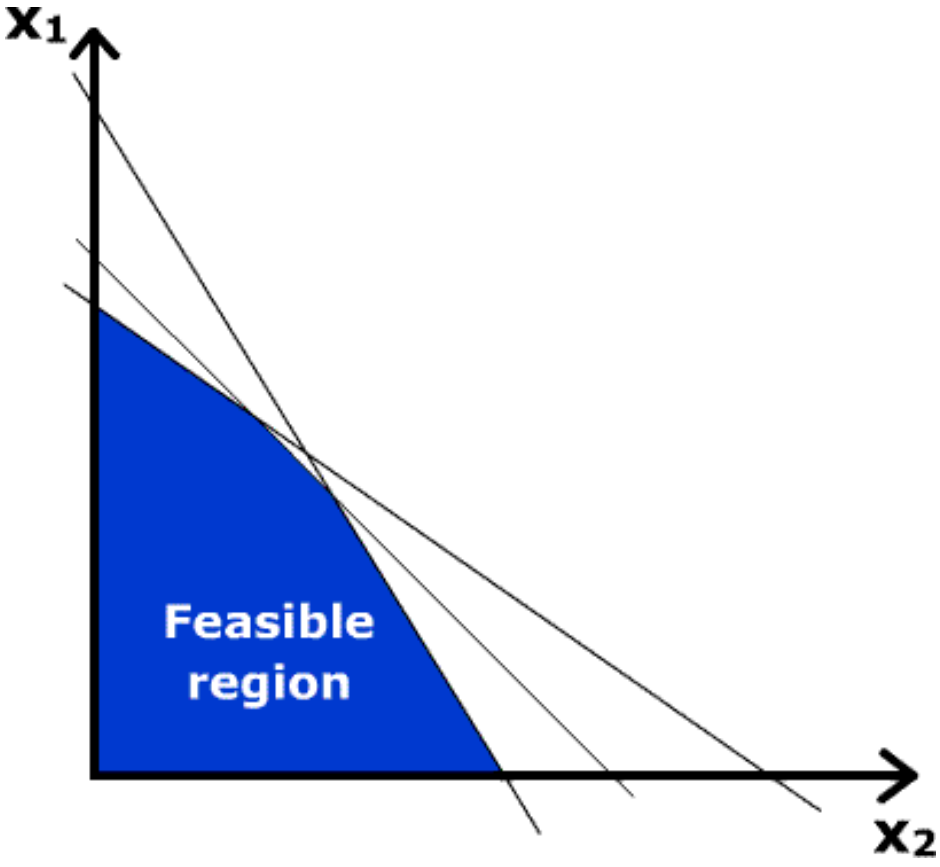
  $P_1x_1 + P_2x_2 \leq P$ (ilość środka owadobójczego)
- nieujemne zmienne (nie da się uprawiać pola o ujemnej powierzchni):

  $x_1 \geq 0$ (powierzchnia uprawy pszenicy)

  $x_2 \geq 0$ (powierzchnia uprawy jęczmienia)

Programowanie liniowe – metody rozwiązywania

- Algorytm simplex – w najgorszym przypadku złożoność wykładnicza
- Metoda elipsoid – złożoność wielomianowa, ale w praktyce gorszy niż simplex
- Algorytm Karmarkara – złożoność wielomianowa, lepszy w praktyce niż simplex



Bajka o trzech złodziejach

Złodziej włamuje się do domu i widzi cztery wartościowe rzeczy:

- biżuterię o wadze 1 kg i wartości 15 PLN,
- żyrandol o wadze 5 kg i wartości 10 PLN,
- obraz o wadze 3 kg i wartości 9 PLN,
- radio o wadze 4 kg i wartości 5 PLN.

Jego plecak może udźwignąć max. 8 kg (obie ręce musi mieć wolne, żeby wyjść przez okno na piętrze). Co powinien zapakować do plecaka?

Mamy trzech złodziei: chciwego, powolnego i sprytnego.

Problem plecakowy

(wersja 0-1)
Maksymalizuj: $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant c \quad x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, n$$

W wersji ciągłej można dzielić przedmioty pakowane do plecaka na części. Wówczas algorytm zachłanny jest optymalny.

Algorytm zachłanny (*greedy*)

- Wrzucamy przedmioty do plecaka zaczynając od przedmiotu o największej wartości (albo stosunku wartość/waga – lepsze, dla problemu ciągłego daje rozwiązanie optymalne).
- Złodziej wrzuca więc kolejno biżuterię (1 kg, 15 PLN) i żyrandol (5 kg, 10 PLN). Plecak może jeszcze udźwignąć 2 kg, ale nie ma tak lekkich przedmiotów, więc złodziej ucieka, unosząc przedmioty o wartości 25 PLN.

Algorytm *brute force*

- *Brute force* – brutalna siła, sprawdzamy wszystkie rozwiązania.
- Powolny złodziej zaczyna sprawdzać wszystkie możliwe rozwiązania. Złożoność problemu wynosi $O(2^n)$, gdyż tyle mamy możliwych do utworzenia podzbiorów. Zanim złodziej policzył odpowiednie sumy wartości i wag przedmiotów, wpadła policja i go aresztowano.

Programowanie dynamiczne (*dynamic programming*)

A(i,j) definiujemy jako maksymalną wartość plecaka o wielkości j, rozpatrując tylko i pierwszych przedmiotów. Szukamy A(n,c). Możemy je znaleźć z następującej zależności rekurencyjnej:

$$A(i,j)=\begin{cases} 0 & dla \quad i=0 \quad lub \quad j=0 \\ A(i-1,j) & dla \quad w_i > j \\ max\{A(i-1,j),\ p_i + A(i-1,j-w_i)\} & dla \quad w_i \leqslant j \end{cases}$$

A więc badamy, czy warto dołożyć i-ty przedmiot do plecaka o w_i mniejszego

Programowanie dynamiczne (*dynamic programming*)

p_i/w_i		15/1	10/5	9/3	5/4
j	**i=0**	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**
0	0	0	0	0	0
1	0	**15**	15	15	15
2	0	15	15	15	15
3	0	15	15	15<	15
4	0	15	15	**24**	24<
5	0	15	15<	24	24<
6	0	15	25	25<	25<
7	0	15	25	25<	25<
8	0	15	25	25<	**29**

Programowanie dynamiczne (*dynamic programming*)

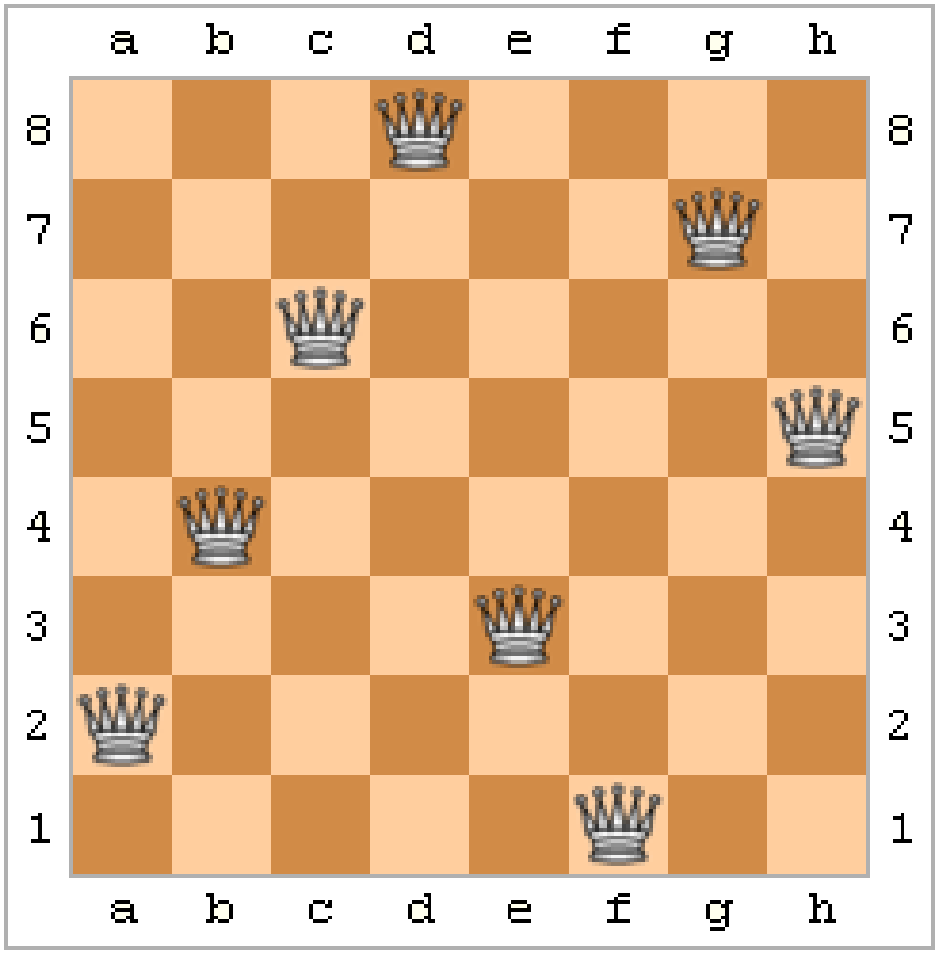
- Sprytny złodziej uzyskał plecak o wartości 29 PLN (4 PLN lepiej niż jego chciwy kolega), zabierając biżuterię, obraz i radio, ważące w sumie 8 kg.
- Złożoność wynosi O(n*c) w porównaniu z $O(2^n)$ algorytmu *brute force*.
- Programowanie dynamiczne możemy wykorzystać np. także w problemie obliczania ciągu Fibonacciego, poprzez zapamiętywanie kolejnych wyrazów ciągu.

Algorytmy przeszukujące przestrzeń rozwiązań (*trial and error*)

- *Brute force* – brutalna siła, sprawdzamy wszystkie rozwiązania.
- *Backtracking* – przeszukiwanie z nawrotami, wykorzystujemy własności zadania aby ograniczyć przeszukiwaną przestrzeń.
- *Branch and bound* – algorytm podziału i ograniczeń, wykorzystujemy własności zadania aby ograniczyć przeszukiwaną przestrzeń.

Problem ośmiu hetmanów

- Rozstawić osiem hetmanów na tradycyjnej szachownicy 8x8 tak, aby wzajemnie się nie atakowały (w pionie, poziomie i po przekątnej)
- Są 92 rozwiązania, 12 jeśli wykluczymy symetryczne i obrócone



Źródło: wikipedia.org

Rozwiązanie problemu – *brute force*

- Generujemy na ślepo wszystkie $64^8=2^{48}$=281,474,976,710,656 możliwych ustawień hetmanów.
- Ponieważ dwa (i więcej) hetmany nie mogą zajmować jednego pola, możemy ograniczyć ilość możliwych ustawień do 64!/56 = 178,462,987,637,760
- Jeszcze lepiej wygenerować wszystkie permutacje (pozycje w danym wierszu lub kolumnie) których jest 8!=40320, co eliminuje ataki w pionie i poziomie (jak dla wieży)

Rozwiązanie problemu – *backtracking*

- Przeszukujemy drzewo rozwiązań oparte na permutacjach. Stosujemy metodę przeszukiwania w głąb. Wystąpienie konfliktu po przekątnej powoduje „odcięcie” całego poddrzewa rozwiązań, dzięki czemu przeszukujemy tylko 15720 ustawień.

Algorytm podziału i ograniczeń (*branch and bound*)

- Dzielimy problem na podproblemy (*branching*), a następnie obliczamy górne i dolne ograniczenia (*bounding*) i „obcinamy” (*pruning*) niektóre gałęzie drzewa przeszukiwań.
- Dla problemu maksymalizacji: jeśli dla danego poddrzewa T jego górne ograniczenie (*upper bound*) jest mniejsze od dolnego ograniczenia (*lower bound*) dowolnego innego poddrzewa, to nie ma sensu testować rozwiązań w T.
- Dolne ograniczenie to zwykle najlepsze dotąd znalezione rozwiązanie.

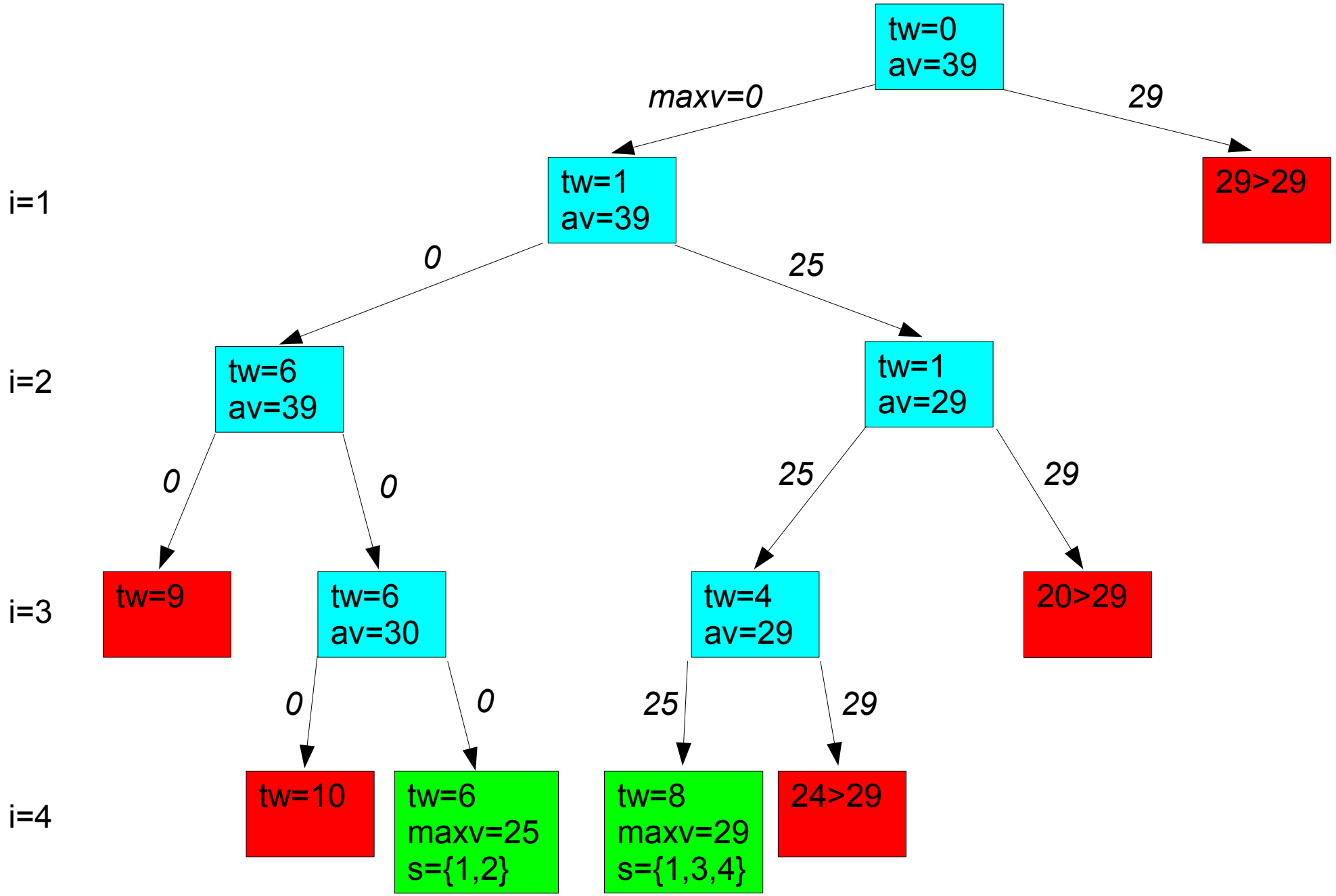
```
PROCEDURE Try(i, tw, av: INTEGER);
VAR av1: INTEGER;
BEGIN (*dołączamy przedmiot i do rowiązania*)
   IF tw + obj[i].weight <= limw THEN
      s := s + {i};
      IF i < n THEN Try(i+1, tw + obj[i].weight, av)
      ELSIF av > maxv THEN maxv := av; opts := s
      END ;
      s := s - {i}
   END ;
   (*wyłączamy przedmiot i z rozwiązania*)
   IF av - obj[i].value > maxv  THEN
      IF i < n THEN Try(i+1, tw, av - obj[i].value)
      ELSE maxv := av - obj[i].value; opts := s
      END
   END
END Try;
```

maxv – najlepsze rozwiązanie (dolne ograniczenie)
totv – suma wszystkich przedmiotów
av – górne ograniczenie (możliwe maksimum)
limw – wielkość plecaka

Wywołanie:

```
maxv := 0; s := {}; opts := {};
Try(1, 0, totv);
```

Źródło: N.Wirth


tw=0
av=39
maxv=0
29
i=1
tw=1
av=39
29>29
0
25
i=2
tw=6
av=39
tw=1
av=29
0
0
25
29
i=3
tw=9
tw=6
av=30
tw=4
av=29
20>29
0
0
25
29
i=4
tw=10
tw=6
maxv=25
s={1,2}
tw=8
maxv=29
s={1,3,4}
24>29

- Jak widać, przeszukiwanie przestrzeni rozwiązań metodą podziału i ograniczeń możliwe jest tylko dla problemów optymalizacyjnych. Nie nadaje się na przykład dla problemu ośmiu hetmanów.
- Można stosować inne metody obliczania ograniczeń. Np. można posortować przedmioty według stosunku wartość/waga, a następnie jako górne ograniczenie przyjąć wynik algorytmu zachłannego dla ciągłego problemu plecakowego.

- Złożoność algorytmu w najgorszym przypadku jest taka, jak *brute force*. Zwykle nadaje się do średniej wielkości instancji problemu.
- Dla problemu plecakowego metoda ta ma tę zaletę, iż pojemność plecaka i wagi przedmiotów nie muszą być całkowitoliczbowe (w przeciwieństwie np. do programowania dynamicznego).

Heurystyki

- Heurystyka - algorytm, który nie gwarantuje znalezienia optymalnego rozwiązania.
- Metaheurystyka – ogólna metoda rozwiązywania szerokiej klasy problemów, nie gwarantująca znalezienia optymalnego rozwiązania. Algorytm polega zwykle na przeszukiwaniu w odpowiedni sposób przestrzeni rozwiązań.

Metaheurystyki

- Przeszukiwanie losowe
- Przeszukiwanie lokalne (*local search*)
  - *Simple hill climbing*
  - *Steepest ascent hill climbing*
  - *Gradient descent/ascent*
- Przeszukiwanie tabu (*tabu search*)
- Symulowane wyżarzanie (*simulated annealing*)
- Algorytmy genetyczne (*genetic algorithms*)

No free lunch

- Średnia wydajność dowolnej pary algorytmów na wszystkich możliwych problemach jest identyczna.