Matematyka dyskretna

Matematyka dyskretna to zbiorcza nazwa działów matematyki, zajmujących się badaniem struktur nieciągłych, czyli skończonych lub co najwyżej przeliczalnych.

Działy mające związek z matematyką dyskretną: logika, teoria mnogości, algebra struktur skończonych, algebra liniowa, kombinatoryka, teoria liczb, algorytmika, teoria informacji, złożoność obliczeniowa, rachunek prawdopodobieństwa, teoria grafów, teoria częściowych porządków.

Zbiór przeliczalny

- Jest to zbiór skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, formalnie:
- Zbiór X nazywamy przeliczalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest on skończony lub istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna przekształcająca zbiór wszystkich liczb naturalnych na zbiór X.
- Moc nieskończonych zbiorów przeliczalnych (naturalnych, całkowitych, wymiernych i innych) oznaczamy $\aleph_0$ (alef zero).
- Zbiór liczb rzeczywistych ma moc continuum.

Zasada minimum

Dowolny niepusty podzbiór $S \subseteq N$ zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę najmniejszą.

Zasada maksimum

Dowolny niepusty i ograniczony od góry podzbiór $S \subseteq N$ zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę największą.

Zasada indukcji matematycznej (zasada „domina”)

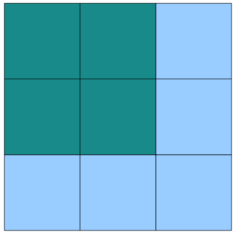
Jeśli $Z \subseteq N$ jest jakimś zbiorem liczb naturalnych,
-w którym jest k_0, tzn. $k_0 \in Z$, (baza indukcji)
-oraz Z wraz z każdą liczbą naturalną $k \geq k_0$ zawiera również kolejną liczbę k+1, tzn.
$\forall k \geq k_0 \; k \in Z \rightarrow k+1 \in Z$, (założenie indukcji)
to wtedy zbiór Z zawiera wszystkie liczby naturalne $n \geq k_0$, tzn. $Z \supseteq N - \{0,1, \ldots ,k_0-1\}$

Dowód Francesco Maurolio

Pierwszy znany dowód indukcyjny (1575 r.):

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

Dowód I: graficzny (kwadraty)



Dowód II: indukcyjny dla k+1

Dowód III: z zasady minimum dla k:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) \neq k^2$$

Przykłady

$$0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad dla \quad n>0$$

$$0^2+1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2\mathrm{n}+1)}{6}$$

$$n^2<2^n \quad dla \quad n\geqslant 5$$

Nierówność Bernoulliego:

$$(1+a)^n\geqslant 1+na \quad dla \;\; rzeczywistego \;\; a\geqslant -1,\, n\in\mathbb{N}$$

Przykłady

$$dla \quad n \geq 2 \quad 2^{2^n} = 10\mathrm{x} + 6$$

$$(ma\, w\, zapisie\, dziesiętnym\, 6\, na\, końcu)$$

$$n - ta\, liczba\, harmoniczna :$$

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

$$\frac{\lfloor lg\, n \rfloor + 1}{2} \leqslant H_n \leqslant \lfloor lg\, n \rfloor + 1 \quad n \geq 1$$

Zasada indukcji zupełnej

Jeśli $Z \subseteq N$ jest jakimś zbiorem liczb naturalnych, który wraz z każdym początkowym fragmentem zbioru N postaci {0, ... , k-1} zawiera również kolejną liczbę k, tzn.

$$\forall k \in N \text{ jeśli } (\forall l < k\ l \in Z), \text{ to } k \in Z$$

to wtedy Z zawiera wszystkie liczby naturalne, tzn.

$$Z = N.$$

Przykład

Niezależnie od kolejności wykonywanych cięć potrzeba i wystarcza dokładnie N-1 cięć aby podzielić czekoladę na N=a*b kawałków.

Błędne rozumowanie indukcyjne (George Polya): wszystkie konie są jednej maści (sprawdzić dla dwóch koni).

Zadania domowe

$1.\, dla \quad n \in N\, ,\, n > 0 \;\; liczba \;\; 11^{n} - 3^{n} \; jest \; podzielna \; przez \; 8$

$2.\, dla \quad n \in N$

$$\frac{1}{1*7}+\frac{1}{7*13}+\frac{1}{13*19}+\ldots+\frac{1}{(6\mathrm{n}-5)(6\mathrm{n}+1)}=\frac{n}{6\mathrm{n}+1}$$