

Matematyka dyskretna

Matematyka dyskretna to zbiorcza nazwa działów matematyki, zajmujących się badaniem struktur nieciągłych, czyli skończonych lub co najwyżej przeliczalnych.

Działy mające związek z matematyką dyskretną:
logika, teoria mnogości, algebra struktur skończonych, algebra liniowa, kombinatoryka, teoria liczb, algorytmika, teoria informacji, złożoność obliczeniowa, rachunek prawdopodobieństwa, teoria grafów, teoria częściowych porządków.

Zbiór przeliczalny

- Jest to zbiór skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, formalnie:
- Zbiór X nazywamy przeliczalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest on skończony lub istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna przekształcająca zbiór wszystkich liczb naturalnych na zbiór X .
- Moc nieskończonych zbiorów przeliczalnych (naturalnych, całkowitych, wymiernych i innych) oznaczamy \aleph_0 (alef zero).
- Zbiór liczb rzeczywistych ma moc continuum.

Zasada minimum

Dowolny niepusty podzbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę najmniejszą.

Zasada maksimum

Dowolny niepusty i ograniczony od góry podzbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ zbioru liczb naturalnych ma w sobie liczbę największą.

Zasada indukcji matematycznej (zasada „domina”)

Jeśli $Z \subseteq \mathbb{N}$ jest jakimś zbiorem liczb naturalnych,
-w którym jest k_0 , tzn. $k_0 \in Z$, (baza indukcji)

-oraz Z wraz z każdą liczbą naturalną $k \geq k_0$
zawiera również kolejną liczbę $k+1$, tzn.

$\forall k \geq k_0 \ k \in Z \rightarrow k+1 \in Z$, (założenie indukcji)

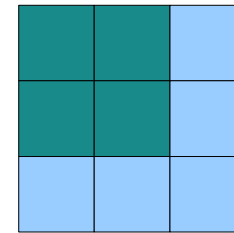
to wtedy zbiór Z zawiera wszystkie liczby
naturalne $n \geq k_0$, tzn. $Z \supseteq \mathbb{N} - \{0, 1, \dots, k_0 - 1\}$

Dowód Francesco Maurolio

Pierwszy znany dowód indukcyjny (1575 r.):

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Dowód I: graficzny (kwadraty)



Dowód II: indukcyjny dla $k+1$

Dowód III: z zasady minimum dla k :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) \neq k^2$$

Przykłady

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{dla } n > 0$$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$n^2 < 2^n \quad \text{dla } n \geq 5$$

Nierówność Bernoulliego:

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{dla rzeczywistego } a \geq -1, n \in \mathbb{N}$$

Przykłady

$$\text{dla } n \geq 2 \quad 2^{2^n} = 10x + 6$$

(ma w zapisie dziesiętnym 6 na końcu)

n-ta liczba harmoniczna :

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor + 1}{2} \leq H_n \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1 \quad n \geq 1$$

Zasada indukcji zupełnej

Jeśli $Z \subseteq \mathbb{N}$ jest jakimś zbiorem liczb naturalnych, który wraz z każdym początkowym fragmentem zbioru \mathbb{N} postaci $\{0, \dots, k-1\}$ zawiera również kolejną liczbę k , tzn.

$\forall k \in \mathbb{N}$ jeśli $(\forall l < k \ l \in Z)$, to $k \in Z$

to wtedy Z zawiera wszystkie liczby naturalne, tzn.
 $Z = \mathbb{N}$.

Przykład

Niezależnie od kolejności wykonywanych cięć potrzeba i wystarcza dokładnie $N-1$ cięć aby podzielić czekoladę na $N=a*b$ kawałków.

Błędne rozumowanie indukcyjne (George Polya): wszystkie konie są jednej maści (sprawdzić dla dwóch koni).

Zadania domowe

1. dla $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ liczba $11^n - 3^n$ jest podzielna przez 8

2. dla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1 * 7} + \frac{1}{7 * 13} + \frac{1}{13 * 19} + \dots + \frac{1}{(6n - 5)(6n + 1)} = \frac{n}{6n + 1}$$