Definicja rekurencyjna (indukcyjna)

- Jest to definicja odwołująca się do samej siebie, do elementu o mniejszej komplikacji.
- Zwykle wynikiem rekurencji jest ciąg $<a_0, a_1, a_2, a_3, ... >$ dla którego definicja elementu a_n wykorzystuje elementy poprzedzające.
- Element początkowy (lub kilka początkowych) muszą być dane bezpośrednio.

Silnia

- $n! = n*(n-1)*...*2*1$
- Ciąg rekurencyjny:
  - $s_0 = 1$
  - $s_n = n * s_{n-1}$ dla $n \geq 1$
- Jak będzie wyglądał ciąg dla:
  - $s_0 = 0$
  - $s_0 = ½$
  - $s_n = n * s_{n-2}$ dla $n \geq 2$

Ciąg arytmetyczny

- $a_n = a_{n-1} + r$
- $a_n = a_0 + n*r$ (udowodnić indukcyjnie)
- np.
  - $s_0 = 0$
  - $s_n = s_{n-1} + 2$
  - $s_n = 2*n$ (zbiór liczb parzystych)

Ciąg geometryczny

- $a_n = q*a_{n-1}$
- $a_n = a_0*q^n$ (udowodnić indukcyjnie)
- np.
  - $s_0 = 1$
  - $s_n = 2*s_{n-1}$
  - $s_n = 2^n$

Wieże Hanoi

U zarania czasu Bóg umieścił 64 złote krążki na jednej z trzech diamentowych iglic tak, że krążki wyżej umieszczone miały mniejsze promienie.
Następnie Bóg polecił grupie mnichów przełożenie tych krążków na trzecią iglicę (C), ale tak by:
– w jednym ruchu przenosić tylko jeden krążek,
– krążek większy nigdy nie może leżeć na krążku mniejszym,
– można posługiwać się iglicą B.
Mnisi pracują od zarania dziejów dzień i noc ... .Ile czasu im to zajmie?

Wieże Hanoi

- Dla jednego krążka A→C (1 ruch)
- Dla dwóch: A→B, A→C, B→C (3 ruchy)
- Dla trzech (7 ruchów):
  - dwa górne na B z użyciem C: A→C, A→B, C→B
  - największy z A na C: A→C
  - z B na C z użyciem A: B→A, B→C, A→C
- Dla n (H_n ruchów):
  - n-1 na B z użyciem C (H_{n-1} ruchów)
  - największy z A na C (1 ruch)
  - n-1 z B na C z użyciem A (H_{n-1} ruchów)

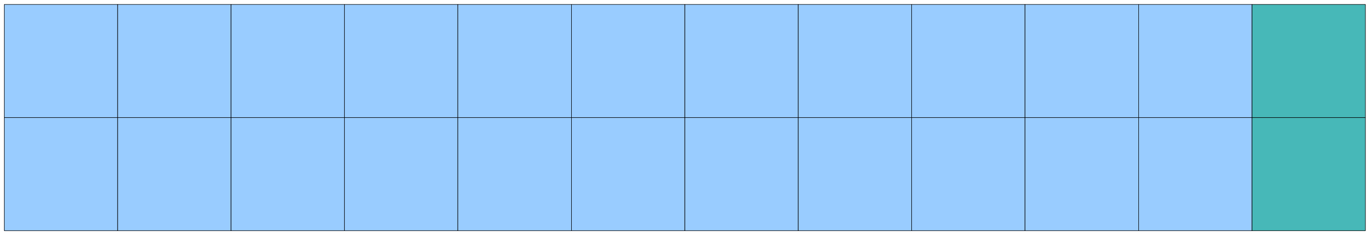
Wieże Hanoi

- Stąd:
  - $H_1 = 1$
  - $H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2*H_{n-1} + 1$ dla $n \geq 2$
  - $H_n = 2^n – 1$ (udowodnić indukcyjnie)
  - H_{64} = ok. 10^{20}
  - 1 ruch/s → 3 000 000 000 000 lat

Ciąg Fibonacciego

- $f_0 = 0$
- $f_1 = 1$
- $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Ciąg Fibonacciego



- Na ile sposobów d_n ułożymy domino na prostokącie o rozmiarze 2*n?
- $n=1 \rightarrow d_1=1,\ d_2=2,\ d_3=3$
- Pokrycie skrajnego pola:
  - Jedno domino pionowo + prostokąt (n-1)
  - Dwa domina poziomo + prostokąt (n-2)
- Stąd $d_n = d_{n-1} + d_{n-2} = f_{n+1}$

Własności ciągu Fibonacciego

- $f_0 + f_1 + ... + f_n = f_{n+2} – 1$ (udowodnić indukcyjnie)
- $f_0^2 + f_1^2 + ... + f_n^2 = f_n * f_{n+1}$ (udowodnić indukcyjnie)

Wzór Eulera-Bineta

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - (1-\varphi)^n\right]$$

a b

$$\varphi = \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (\textit{złota liczba})$$

Wzór Keplera

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

Macierze liczb Fibonacciego

$$\begin{bmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

Z wyznaczników (G.D.Cassini, 1680):

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^{\,2} = (-1)^n$$

Drzewa binarne

Drzewo binarne to dowolny obiekt powstały zgodnie z regułami:

- $\perp$ jest drzewem binarnym
- Jeśli T_0 i T_1 są drzewami binarnymi to $T_0 \wedge T_1$ jest drzewem binarnym

Np. $(\perp \wedge \perp) \wedge (\perp \wedge (\perp \wedge \perp))$

Wielkość drzewa binarnego

- $|\perp| = 1$
- $|T_0+T_1| = |T_0| + |T_1| + 1$

Szerokość drzewa binarnego

- $w(\perp) = 1$
- $w(T_0 \wedge T_1) = w(T_0) + w(T_1)$

Wysokość drzewa binarnego

- $h(\perp) = 0$
- $h(T_0 \wedge T_1) = \max(h(T_0), h(T_1)) + 1$

Własności

- $h(T_i) < h(T)$
- $w(T_i) < w(T)$
- $|T_i| < |T|$
- $h(T) \leq w(T) \leq |T|$
- $|T| = 2*w(T) - 1$ (udowodnić indukcyjnie)

Zadanie domowe 1

- $a_0 = 2$
- $a_1 = 5$
- $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geq 2$
- Udowodnić, że $a_n = 2^n + 3^n$

Zadanie domowe 2

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 2$
- $a_n = a_{n-1}^2 / a_{n-2}$ dla $n \geq 2$
- Udowodnić, że $a_n = 2^n$

Zadanie domowe 3

- Ciąg liczb Lucasa:
- $l_0 = 1$
- $l_1 = 3$
- $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ dla $n \geq 2$
- Udowodnić, że $l_n = f_{n+1} + f_{n-1}$ (przyjąć $f_{-1}=0$)