

# Funkcja

Funkcja o dziedzinie  $X$  i przeciwdziedzinie  $Y$  to dowolna relacja  $f \subseteq X \times Y$  taka, że:

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : \langle x, y \rangle \in f$$

Notacje:

$$f : X \rightarrow Y \quad f(x) = y \quad f : x \rightarrow y$$

# Przykłady

- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = n/2$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \{13\}, f(n) = 13$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = (1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1))^n$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \sin(2\lceil n \rceil)$
- $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*, f(n) = n1$  (rozszerzenie o 1)
- $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \text{długość } n$

# Surjekcja – funkcja „na”

- Surjekcja to funkcja  $f: X \rightarrow Y$  spełniająca warunek:

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

# Injeksja – funkcja różnowartościowa

- Injeksja to funkcja  $f: X \rightarrow Y$  spełniająca warunek:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

# Bijekcja – funkcja różnowartościowa

Bijekcja to funkcja, która jest jednocześnie surjekcją i injekcją.

<u>Funkcja</u>	<u>sur</u>	<u>in</u>	<u>bi</u>
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$	tak	tak	tak
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x^3$	nie	tak	nie
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$	nie	tak	nie
$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = 2x$	tak	tak	tak
$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$	tak	tak	tak
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$	tak	nie	nie
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$	nie	nie	nie
$f: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*, f(x) = x1$	nie	tak	nie
$f: \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \text{długość}$	tak	nie	nie

# Funkcja odwrotna

- Zmiana kierunku relacji.
- Funkcja posiada funkcję odwrotną, wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.
- Jaka musi być dziedzina i przeciwdziedzina aby funkcja  $f(x)=x^2$  posiadała funkcję odwrotną?
- $(-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$

# Składanie funkcji

- Złożenie funkcji  $f: X \rightarrow Y$  i funkcji  $g: Y \rightarrow Z$  to funkcja  $gf: X \rightarrow Z$  określona dla wszystkich argumentów  $x \in X$  jako  $(gf)(x) = (g(f(x)))$
- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x+2$
- $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(x) = 3x$
- $gf(x) = g(f(x)) = 3(x+2) = 3x+6$
- $fg(x) = f(g(x)) = (3x)+2 = 3x+2$
- $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$  oznaczane  $\text{id}_X$
- $f(gh) = (fg)h$

# Funkcje wielu zmiennych

- Funkcja dwóch zmiennych to funkcja, której dziedziną jest zbiór par (zamiast pojedynczych elementów).
- Piszemy np.  $f: X \times Y \rightarrow Z$
- Przykładem są działania arytmetyczne:
  - $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x + y$
- Podobnie można zdefiniować funkcje trzech i więcej zmiennych.



# Zliczanie zbiorów

- $Z_0 = \emptyset$
- $Z_1 = \{0\}$
- $Z_2 = \{0, 1\}$
- $Z_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$
- Jeśli istnieje bijekcja  $Z_n$  na  $Z_m$  to  $n=m$
- **Zbiór skończony** to zbiór bijektywny z pewnym zbiorem postaci  $Z_n$
- **Zbiór nieskończony** to zbiór, który nie jest skończony.

# Zbiór przeliczalny

- Liczba elementów skończonego zbioru  $X$ , to jedyna liczba naturalna  $n$  taka, że istnieje bijekcja z  $Z_n$  w  $X$ . Liczbę tę oznaczamy przez  $|X|$ .
- Zbiór  $X$  jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje iniekcja z  $N$  w  $X$ .
- Zbiór przeliczalny to zbiór skończony lub bijektywny z  $N$ .

# Zasada Szufladkowa Dirichleta (1834)

- Jeśli  $n$  obiektów jest rozmieszczonych w  $m$  szufladach i  $n > m$ , to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.
- Przykład: wśród mieszkańców Krakowa co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie ( $800000 > 500000$ ).
- Przykład: w grupie 13 osób muszą być co najmniej dwie, które urodziły się w tym samym miesiącu.

# Zadania

- Pewna grupa osób wita się podając sobie ręce. Nikt nie wita się z samym sobą i żadna para osób nie wita się podwójnie. Czy muszą być dwie osoby, które witały taką samą liczbę osób? (wskazówka: 0 i  $n-1$  nie mogą wystąpić jednocześnie)
- Wybierzmy dowolnie 10 różnych liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  spośród  $1, 2, 3, \dots, 100$ . Wykazać, że w zbiorze  $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$  można wybrać dwa rozłączne podzbiory, dające tę samą sumę.

# Uogólniona zasada szufladkowa

- Jeśli  $m$  obiektów rozmieszczonych jest w  $n$  szufladach i  $m > nr$ , dla pewnego naturalnego  $r$ , to istnieje szufladka z co najmniej  $r+1$  obiektami.

# Zasada dodawania

- Dla zbiorów  $A_1, \dots, A_n$  skończonych i parami rozłącznych:  $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$

# Zasada włączania i wyłączenia

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \prod_{i \in I} A_i \right| \\ &= |A_1| + \dots + |A_n| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-2} \cap A_n| - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \dots - |A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + \dots \\ &\quad (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

w szczególności  $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

# Zasada mnożenia

- Iloczyn kartezjański (produkt) zbiorów  $X$  i  $Y$  to zbiór:  $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$
- Dla skończonych zbiorów  $X, Y$ :  $|X \times Y| = |X| * |Y|$  gdzie  $X \times Y$  to iloczyn kartezjański zbiorów  $X$  i  $Y$ .
- Przykład: turniej rycerski między bractwem czerwonych a bractwem niebieskich. Bractwo czerwonych ma 12 rycerzy, bractwo niebieskich 15. Ile różnych indywidualnych pojedynków może być stoczonych, jeśli rycerze z tego samego bractwa nigdy ze sobą nie walczą?  
 $|C \times N| = |C| * |N| = 12 * 15$



# Zliczanie podzbiorów

- Zbiór potęgowy, lub inaczej zbiór podzbiorów, zbioru  $X$  oznaczamy przez  $P(X)$ .
- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$   $|P(\emptyset)| = 1$
- $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$   $|P(\{a\})| = 2$
- $P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$   $|P(\{a,b\})| = 4$
- $p_n = |P(X)| = 2^n$
- Powyższy wzór udowodnić ( $p_{n+1} = p_n + p_n$ )

# Zliczanie funkcji

- Dla skończonych zbiorów  $X, Y$  mamy:
- $|Y^X| = |Y|^{|X|}$
- Trzech kolegów: Bartek, Paweł i Piotrek spotkali się w pubie tuż po zdanym egzaminie z matematyki dyskretnej. Okazało się, że jest pięć marek piwa do wyboru. Na ile sposobów mogą oni wypić pierwszą kolejkę?  $5^3 = 125$

# Zliczanie funkcji

- Kod PIN jest kodem autoryzującym właściciela karty bankomatowej. Składa się on z 4 cyfr dziesiętnych. Ile jest różnych kodów PIN?
- Każdy kod PIN to funkcja z czteroelementowego zbioru pozycji  $\{0, 1, 2, 3\}$  w dziesięcioelementowy zbiór cyfr  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . Kodów PIN jest dokładnie  $10^4=10000$ .

- Liczba iniekcji ze zbioru skończonego  $X$  w zbiór skończony  $Y$  wynosi:
- $|Y|^*(|Y|-1)*...*(|Y|-|X|+1) = |Y|! / (|Y|-|X|)!$
- Ile jest PIN-ów, czyli cztero-elementowych słów złożonych z cyfr dziesiętnych, takich że żadna cyfra się nie powtarza?
- Każdy PIN z niepowtarzającymi się cyframi to iniekcja z czteroelementowego zbioru pozycji  $\{0,1,2,3\}$  w 10-elementowy zbiór cyfr  $\{0,1,\dots,9\}$ . Zatem jest ich dokładnie  $10*9*8*7=5040$ .

- Liczba bijekcji pomiędzy skończonymi zbiorami  $X$  i  $Y$ , gdzie  $|X|=|Y|$  wynosi  $|X|!$
- Na kurs tańca uczęszcza pięciu chłopaków i pięć dziewcząt. Większość kroków tanecznych ćwiczy się parami. Dla urozmaicenia pary często się zmieniają. Na ile sposobów może być wykonany jeden taniec?  $5! = 120$

# Permutacje

- Permutacja zbioru skończonego  $X$  to bijekcja z  $X$  w  $X$ .
- Złożenia permutacji także są permutacjami.
- $a^{-1}$  jest permutacją  $X$  taką, że  $aa^{-1} = a^{-1}a = \text{id}_X$
- Na ile sposobów można poukładać koło siebie na półce 7 książek?  $7! = 5040$
- Cykl zbioru  $n$ -elementowego  $X$  to taka permutacja zbioru  $X$ , dla której  $\{x, a(x), a^2(x), \dots, a^{n-1}(x)\} = X$ , przy dowolnym  $x \in X$
- Każdą permutację można rozłożyć na rozłączne cykle, np.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \{2, 3, 6, 0, 4, 1, 5\}$  składa się z  $(026513)(4)$

# Zadania domowe

- Piotrek ma w szufladzie 20 białych skarpetek i 20 czarnych. Lewe skarpetki są zupełnie nieodróżnialne od prawych.
  - Ile skarpetek musi on zabrać bez zaglądania do szuflady, aby mieć pewność, że choć dwie będą tego samego koloru?
  - Ile skarpetek musi on zabrać bez zaglądania do szuflady, aby mieć pewność, że choć 10 będzie tego samego koloru?

# Zadania domowe

- Uzasadnij, że wśród pięciu punktów wybranych wewnątrz kwadratu wielkości  $2 \times 2$  zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż  $\sqrt{2}$ .
- Piotruś ma 9 klocków białych i 9 klocków czarnych o nieodróżnialnych kształtach. Wołającej go na obiad matce powiedział, że spośród wszystkich możliwych do ułożenia wież o wysokości 10 klocków, ułożył dopiero połowę, a na obiad przyjdzie jak ułoży po kolei wszystkie. Ile różnych wież mu zostało do ułożenia i czy zdąży na obiad?  $(2^{10}-2)/2 = 511$



# Zadania domowe

- Na ile sposobów można rozstawić 8 wież na ponumerowanych polach szachownicy  $8 \times 8$  w taki sposób, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia?  $8! = 40320$
- 128-miu uczestnikom pewnej konferencji informatycznej przygotowano konta komputerowe, gdzie ID są 8-znakowe i, z uwagi na defekt wielu klawiatur, utworzone wyłącznie z liter a,b. Przydzielono je później losowo - na ile sposobów było to możliwe?  $256! / 128!$

# Zadania domowe

- Bartek, Paweł i Piotrek wybrali się na wesele znajomych. W pewnym momencie na parkiecie tańczyło 7 samotnych dziewcząt. Cała trójka postanowiła spróbować szczęścia. Najpierw jednak ustalili, że każdy poprosi do tańca inną panią. Na ile sposobów mogli oni dokonać wyboru?  $7! / 4!$
- Masz zestaw składający się z trzech typów klocków: 6 dużych, 7 średnich i 3 małych. Na ile sposobów można zbudować piramidę złożoną z 3 klocków (na dole największy, później średni i na górze mały)?  $6 \cdot 7 \cdot 3$

# Zadania domowe

- Jaka jest maksymalna liczba punktów które można wybrać w trójkącie równobocznym o boku 1 (wraz z obrzeżami) tak, by dowolne dwa były odległe o co najmniej  $\frac{1}{2}$  ? (pokazać graficznie) 6