Funkcja

Funkcja o dziedzinie X i przeciwdziedzinie Y to dowolna relacja f⊆XxY taka, że:

$$\forall\, x \in X\ \exists!\, y \in Y : \langle x, y \rangle \in f$$

Notacje:

$$f : X \to Y \qquad f(x) = y \qquad f : x \to y$$

Przykłady

- f: $N \rightarrow N$, $f(n) = 2n$
- f: $N \rightarrow R$, $f(n) = n/2$
- f: $N \rightarrow \{13\}$, $f(n) = 13$
- f: $N \rightarrow N$, $f(n) = (1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1))^n$
- f: $R \rightarrow R$, $f(n) = \sin(2\Pi n)$
- f: $\{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$, $f(n) = n1$ (rozszerzenie o 1)
- f: $\{0,1\}^* \rightarrow N$, $f(n) =$ długość n

Surjekcja – funkcja „na”

- Surjekcja to funkcja $f:X\rightarrow Y$ spełniająca warunek:

$$\forall\, y\in Y\; \exists x\in X : f(x)=y$$

Injekcja – funkcja różnowartościowa

- Injekcja to funkcja f:X→Y spełniająca warunek:

$$\forall x_{1,} x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Bijekcja – funkcja różnowartościowa

Bijekcja to funkcja, która jest jednocześnie surjekcją i injekcją.

Funkcja	sur	in	bi
f: $R \to R$, $f(x) = x^3$	tak	tak	tak
f: $Q \to Q$, $f(x) = x^3$	nie	tak	nie
f: $N \to N$, $f(x) = 2x$	nie	tak	nie
f: $Q \to Q$, $f(x) = 2x$	tak	tak	tak
f: $Z \to Z$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$	tak	tak	tak
f: $R \to Z$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$	tak	nie	nie
f: $R \to R$, $f(x) = \sin(x)$	nie	nie	nie
f: $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$, $f(x) = x1$	nie	tak	nie
f: $\{0,1\}^* \to N$, $f(x)$ = długość	tak	nie	nie

Funkcja odwrotna

- Zmiana kierunku relacji.
- Funkcja posiada funkcję odwrotną, wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.
- Jaka musi być dziedzina i przeciwdziedzina aby funkcja $f(x)=x^2$ posiadała funkcję odwrotną?
- $<0,+\infty) \rightarrow <0,+\infty)$

Składanie funkcji

- Złożenie funkcji $f: X \to Y$ i funkcji $g: Y \to Z$ to funkcja $gf: X \to Z$ określona dla wszystkich argumentów $x \in X$ jako $(gf)(x) = (g(f(x))$
- $f: N \to N,\ f(x) = x+2$
- $g: N \to N,\ g(x) = 3x$
- $gf(x) = g(f(x)) = 3(x+2) = 3x+6$
- $fg(x) = f(g(x)) = (3x)+2 = 3x+2$
- $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$ oznaczane idx
- $f(gh) = (fg)h$

Funkcje wielu zmiennych

- Funkcja dwóch zmiennych to funkcja, której dziedziną jest zbiór par (zamiast pojedynczych elementów).
- Piszemy np. $f: X x Y \rightarrow Z$
- Przykładem są działania arytmetyczne:
  - $f: R x R \rightarrow R$, $f(x,y) = x+y$
- Podobnie można zdefiniować funkcje trzech i więcej zmiennych.

Zliczanie zbiorów

- $Z_0 = \emptyset$
- $Z_1 = \{0\}$
- $Z_2 = \{0, 1\}$
- $Z_k = \{0, 1, \ldots, k\text{-}1\}$
- Jeśli istnieje bijekcja Z_n na Z_m to $n=m$
- **Zbiór skończony** to zbiór bijektywny z pewnym zbiorem postaci Z_n
- **Zbiór nieskończony** to zbiór, który nie jest skończony.

Zbiór przeliczalny

- Liczba elementów skończonego zbioru X, to jedyna liczba naturalna n taka, że istnieje bijekcja z Z_n w X. Liczbę te oznaczamy przez |X|.
- Zbiór X jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje injekcja z N w X.
- Zbiór przeliczalny to zbiór skończony lub bijektywny z N.

Zasada Szufladkowa Dirichleta (1834)

- Jeśli n obiektów jest rozmieszczonych w m szufladach i n>m, to istnieje szuflada z przynajmniej dwoma obiektami.
- Przykład: wśród mieszkańców Krakowa co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie (800000>500000).
- Przykład: w grupie 13 osób muszą być co najmniej dwie, które urodziły się w tym samym miesiącu.

Zadania

- Pewna grupa osób wita się podając sobie ręce. Nikt nie wita się z samym sobą i żadna para osób nie wita się podwójnie. Czy muszą być dwie osoby, które witały taką samą liczbę osób? (wskazówka: 0 i n-1 nie mogą wystąpić jednocześnie)
- Wybierzmy dowolnie 10 różnych liczb naturalnych $a_1,a_2,...,a_{10}$ spośród 1,2,3,...,100. Wykazać, że w zbiorze $\{a_1,a_2,...,a_{10}\}$ można wybrać dwa rozłączne podzbiory, dające tę samą sumę.

Uogólniona zasada szufladkowa

- Jeśli m obiektów rozmieszczonych jest w n szufladach i $m>nr$, dla pewnego naturalnego r, to istnieje szufladka z co najmniej $r+1$ obiektami.

Zasada dodawania

- Dla zbiorów $A_1,...,A_n$ skończonych i parami rozłącznych: $|A_1 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + ... + |A_n|$

Zasada włączania i wyłączania

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|I|+1} |\prod_{i \in I} A_i|$$

$$= |A_1| + \ldots + |A_n|$$

$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-2} \cap A_n| - |A_{n-1} \cap A_n|$$

$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$$

$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ldots - |A_{n-3} \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$$

$$+\ldots$$

$$(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$w\, szczególności\, |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Zasada mnożenia

- Iloczyn kartezjański (produkt) zbiorów X i Y to zbiór: $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$
- Dla skończonych zbiorów X,Y: $|X \times Y| = |X|*|Y|$ gdzie $X \times Y$ to iloczyn kartezjański zbiorów X i Y.
- Przykład: turniej rycerski między bractwem czerwonych a bractwem niebieskich. Bractwo czerwonych ma 12 rycerzy, bractwo niebieskich 15. Ile różnych indywidualnych pojedynków może być stoczonych, jeśli rycerze z tego samego bractwa nigdy ze sobą nie walczą?
  $|C \times N| = |C| * |N| = 12*15$

Zliczanie podzbiorów

- Zbiór potęgowy, lub inaczej zbiór podzbiorów, zbioru X oznaczamy przez P(X).
- $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ $\quad |P(\emptyset)| = 1$
- $P(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ $\quad |P(\{a\})| = 2$
- $P(\{a,b\}) \}= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ $\quad |P(\{a,b\})| = 4$
- $p_n = |P(X)| = 2^n$
- Powyższy wzór udowodnić ($p_{n+1} = p_n + p_n$)

Zliczanie funkcji

- Dla skończonych zbiorów X,Y mamy:
- $|Y^X| = |Y|^{|X|}$
- Trzech kolegów: Bartek, Paweł i Piotrek spotkali się w pubie tuż po zdanym egzaminie z matematyki dyskretnej. Okazało się, że jest pięć marek piwa do wyboru. Na ile sposobów mogą oni wypić pierwszą kolejkę? $5^3 = 125$

Zliczanie funkcji

- Kod PIN jest kodem autoryzującym właściciela karty bankomatowej. Składa się on z 4 cyfr dziesiętnych. Ile jest różnych kodów PIN?
- Każdy kod PIN to funkcja z czteroelementowego zbioru pozycji {0, 1, 2, 3} w dziesięcioelementowy zbiór cyfr {0,1,...,9}. Kodów PIN jest dokładnie 10^4=10000.

- Liczba injekcji ze zbioru skończonego X w zbiór skończony Y wynosi:
- $|Y|*(|Y|-1)*...*(|Y|-|X|+1) = |Y|! / (|Y|-|X|)!$
- Ile jest PIN-ów, czyli cztero-elementowych słów złożonych z cyfr dziesiętnych, takich że żadna cyfra się nie powtarza?
- Każdy PIN z niepowtarzającymi się cyframi to injekcja z czteroelementowego zbioru pozycji {0,1,2,3} w 10-elementowy zbiór cyfr {0,1,...,9}. Zatem jest ich dokładnie 10*9*8*7=5040.

- Liczba bijekcji pomiędzy skończonymi zbiorami X i Y, gdzie |X|=|Y| wynosi |X|!
- Na kurs tańca uczęszcza pięciu chłopaków i pięć dziewcząt. Większość kroków tanecznych ćwiczy się parami. Dla urozmaicenia pary często się zmieniają. Na ile sposobów może być wykonany jeden taniec? 5! = 120

Permutacje

- Permutacja zbioru skończonego X to bijekcja z X w X.
- Złożenia permutacji także są permutacjami.
- a^{-1} jest permutacją X taką, że $aa^{-1} = a^{-1}a = idx$
- Na ile sposobów można poukładać koło siebie na półce 7 książek? 7! = 5040
- Cykl zbioru n-elementowego X to taka permutacja zbioru X, dla której $\{x,a(x),a^2(x),...,a^{n-1}(x)\}=X$, przy dowolnym $x \in X$
- Każdą permutację można rozłożyć na rozłączne cykle, np. {0,1,2,3,4,5,6}=>{2,3,6,0,4,1,5} składa się z (026513)(4)

Zadania domowe

- Piotrek ma w szufladzie 20 białych skarpetek i 20 czarnych. Lewe skarpetki są zupełnie nieodróżnialne od prawych.
  - Ile skarpetek musi on zabrać bez zaglądania do szuflady, aby mieć pewność, że choć dwie będą tego samego koloru?
  - Ile skarpetek musi on zabrać bez zaglądania do szuflady, aby mieć pewność, że choć 10 będzie tego samego koloru?

Zadania domowe

- Uzasadnij, że wśród pięciu punktów wybranych wewnątrz kwadratu wielkości 2*2 zawsze są dwa punkty odległe o nie więcej niż sqrt(2).
- Piotruś ma 9 klocków białych i 9 klocków czarnych o nieodróżnialnych kształtach. Wołającej go na obiad matce powiedział, że spośród wszystkich możliwych do ułożenia wież o wysokości 10 klocków, ułożył dopiero połowę, a na obiad przyjdzie jak ułoży po kolei wszystkie. Ile różnych wież mu zostało do ułożenia i czy zdąży na obiad? $(2^{10}-2)/2 = 511$

Zadania domowe

- Na ile sposobów można rozstawić 8 wież na ponumerowanych polach szachownicy 8*8 w taki sposób, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia? 8! = 40320
- 128-miu uczestnikom pewnej konferencji informatycznej przygotowano konta komputerowe, gdzie ID są 8-znakowe i, z uwagi na defekt wielu klawiatur, utworzone wyłącznie z liter a,b. Przydzielono je później losowo - na ile sposobów było to możliwe? 256! / 128!

Zadania domowe

- Bartek, Paweł i Piotrek wybrali się na wesele znajomych. W pewnym momencie na parkiecie tańczyło 7 samotnych dziewcząt. Cała trójka postanowiła spróbować szczęścia. Najpierw jednak ustalili, że każdy poprosi do tańca inną panią. Na ile sposobów mogli oni dokonać wyboru? 7! / 4!
- Masz zestaw składający się z trzech typów klocków: 6 dużych, 7 średnich i 3 małych. Na ile sposobów można zbudować piramidę złożoną z 3 klocków (na dole największy, później średni i na górze mały)? 6*7*3

Zadania domowe

- Jaka jest maksymalna liczba punktów które można wybrać w trójkącie równobocznym o boku 1 (wraz z obrzeżami) tak, by dowolne dwa były odległe o co najmniej ½ ? (pokazać graficznie) 6