

Współczynnik dwumianowy

- to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego
- Oznaczany $\binom{n}{k} = |P_k(Z_n)|$ (n po k)
-
- np. 4 po 2 wynosi 6:
 $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

Współczynnik dwumianowy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{dla } n > 0$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla } k > n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{dla } n \geq k \geq 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{dla } n \geq k > 0$$

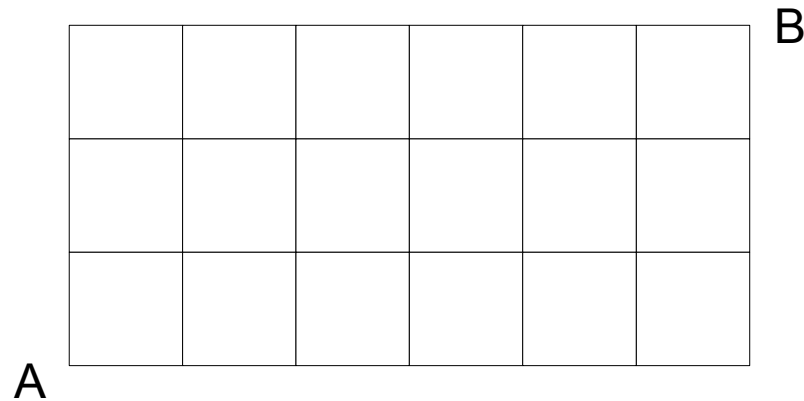
Trójkąt Pascala

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & & & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Trójkąt Pascala

- Współczynniki o tym samym górnym indeksie tworzą **wiersz**
- Współczynniki o tym samym dolnym indeksie tworzą **przekątną**
- Zadanie: wypisać elementy trójkąta Pascala
- Zadanie: wypisać elementy trójkąta Pascala modulo 2.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$



Ile jest najkrótszych dróg z A do B? Mamy 9 skrzyżowań, wybieramy 6 na których idziemy na wschód lub 3 na których idziemy na północ. A więc mamy 9 po 3 lub 9 po 6 rozwiązań (94).

W ogólności, dla kratki $m \times n$ rysujemy $m+n$ odcinków, a więc ilość najkrótszych dróg to:

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

gdzie x_i są liczbami naturalnymi?

Odpowiada to kratce 7×4 , a więc mamy $7+4$ po 4 (330) rozwiązań. W ogólności, równanie:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} = n$$

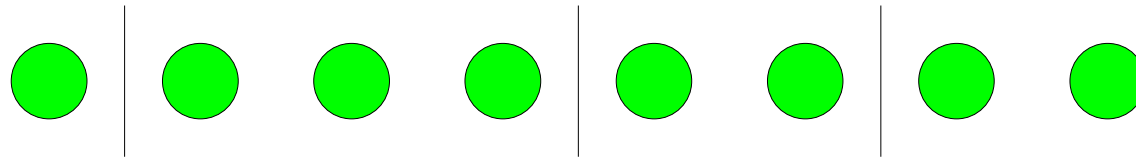
ma tyle rozwiązań ile jest łamanych w kratce $k \times n$:

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} = n$$

gdzie x_i są **dodatnimi** liczbami naturalnymi?



Mamy $n-1$ pozycji dla $k-1$ separatorów, a więc $n-1$ po $k-1$ rozwiązań.

Na ile sposobów możemy narysować prostokąt na kratce $n \times n$?

Podpowiedź: każdy prostokąt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie linie pionowe i dwie poziome.

Mamy więc:

$$\binom{n+1}{2}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

sposobów.

Reguła sumowania po górnym indeksie

$$\sum_{i=0 \dots n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Reguła sumowania równoległego

$$\sum_{i=0 \dots k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

Tożsamość Cauchy'ego Split Vandermonde'a

Dla liczb naturalnych m, n, k mamy:

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Policzmy liczbę wyborów k osób spośród m mężczyzn i n kobiet.

Twierdzenie o dwumianie

Dla rzeczywistych x , y oraz naturalnych n :

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

(ilość wszystkich podzbiorów to 2^n)

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0^n$$

Uwaga: 0 po 0 wynosi $1 = 0^0$

Dla $n=0$ istnieje jeden zbiór pusty. Dla $n>0$ jest to równoważne stwierdzeniu, że dla n elementowego zbioru X liczba podzbiorów o parzystej liczbie elementów jest równa liczbie podzbiorów o nieparzystej liczbie elementów.

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k \binom{n}{k}$$

Rozważmy liczbę kolorowań k rozróżnialnych obiektów wybranych spośród n , przy użyciu dwu kolorów.

Podzbiór k -elementowy n -elementowego zbioru obiektów można wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów i każdy taki podzbiór możemy pokolorować na 2^k sposobów.

Dowolne kolorowanie posiada i obiektów białych oraz $k-i$ czarnych. Każde kolorowanie możemy otrzymać wybierając najpierw i obiektów spośród wszystkich n (kolorując je na biało), z pozostałych $n-i$ obiektów wybierając $k-i$ (kolorując je na czarno)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Rozważmy liczbę wyborów n osób z $2n$ -osobowej grupy złożonej z n mężczyzn i n kobiet.

Oczywiście, z jednej strony, sposobów wyboru n spośród $2n$ osób jest $2n$ po n .

Alternatywnie zauważmy, że wybierając n osób wybieramy i mężczyzn oraz $n-i$ kobiet dla pewnego $i \in \{0, \dots, n\}$