Współczynnik dwumianowy

- to liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego
- Oznaczany $\binom{n}{k} = |P_k(Z_n)|$ (n po k)
-
- np. 4 po 2 wynosi 6: {0,1},{0,2},{0,3},{1,2},{1,3},{2,3}

Współczynnik dwumianowy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n \quad dla\; n > 0$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad dla\; k > n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad dla\; n \geqslant k \geqslant 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad dla\; n \geqslant k > 0$$

Trójkąt Pascala

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

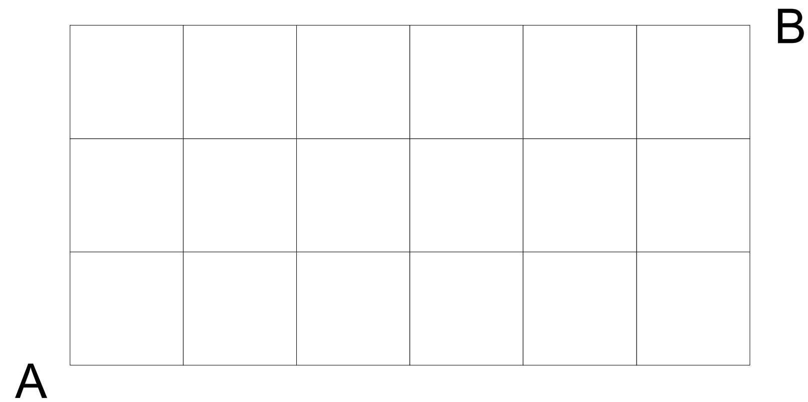
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Trójkąt Pascala

- Współczynniki o tym samym górnym indeksie tworzą **wiersz**
- Współczynniki o tym samym dolnym indeksie tworzą **przekątną**
- Zadanie: wypisać elementy trójkąta Pascala
- Zadanie: wypisać elementy trójkąta Pascala modulo 2.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$



Ile jest najkrótszych dróg z A do B? Mamy 9 skrzyżowań, wybieramy 6 na których idziemy na wschód lub 3 na których idziemy na północ. A więc mamy 9 po 3 lub 9 po 6 rozwiązań (94).
W ogólności, dla kratki mxn rysujemy m+n odcinków, a więc ilość najkrótszych dróg to:

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

gdzie x_i są liczbami naturalnymi?

Odpowiada to kratce 7x4, a więc mamy 7+4 po 4 (330) rozwiązań. W ogólności, równanie:

$$x_0 + x_1 + ... + x_{k-1} = n$$

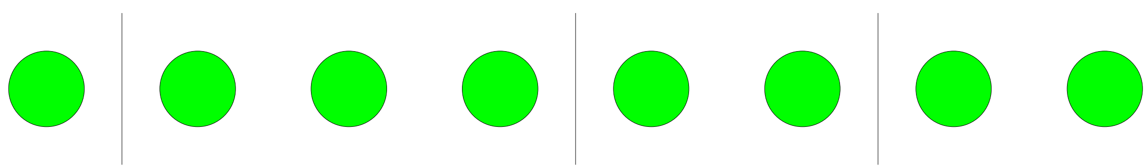
ma tyle rozwiązań ile jest łamanych w kratce kxn:

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

Ile rozwiązań ma równanie:

$$x_0 + x_1 + ... + x_{k-1} = n$$

gdzie x_i są **dodatnimi** liczbami naturalnymi?



Mamy n-1 pozycji dla k-1 separatorów, a więc n-1 po k-1 rozwiązań.

Na ile sposobów możemy narysować prostokąt na kratce nxn?
Podpowiedź: każdy prostokąt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie linie pionowe i dwie poziome.
Mamy więc:

$$\binom{n+1}{2}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

sposobów.

Reguła sumowania po górnym indeksie

$$\sum_{i=0\ldots\mathrm{n}} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Reguła sumowania równoległego

$$\sum_{i=0\ldots\mathrm{k}} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

Tożsamość Cauchy'ego
Splot Vandermonde'a

Dla liczb naturalnych m,n,k mamy:

$$\sum_{i=0\ldots\mathrm{k}} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

Policzmy liczbę wyborów k osób spośród m mężczyzn i n kobiet.

Twierdzenie o dwumianie

Dla rzeczywistych x, y oraz naturalnych n:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0\ldots\mathrm{n}} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2\mathrm{xy} + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3\mathrm{x}^2 y + 3\mathrm{xy}^2 + y^3$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

(ilość wszystkich podzbiorów to 2^n)

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0^n$$

Uwaga: 0 po 0 wynosi 1 = 0^0

Dla n=0 istnieje jeden zbiór pusty. Dla n>0 jest to równoważne stwierdzeniu, że dla n elementowego zbioru X liczba podzbiorów o parzystej liczbie elementów jest równa liczbie podzbiorów o nieparzystej liczbie elementów.

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\ldots+\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=2^k\binom{n}{k}$$

Rozważmy liczbę kolorowań k rozróżnialnych obiektów wybranych spośród n, przy użyciu dwu kolorów.
Podzbiór k-elementowy n-elementowego zbioru obiektów można wybrać na n po k sposobów i każdy taki podzbiór możemy pokolorować na 2^k sposobów.
Dowolne kolorowanie posiada i obiektów białych oraz k-i czarnych. Każde kolorowanie możemy otrzymać wybierając najpierw i obiektów spośród wszystkich n (kolorując je na biało), z pozostałych n-i obiektów wybierając k-i(kolorując je na czarno)

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2\mathrm{n}}{n}$$

Rozważmy liczbę wyborów n osób z 2n-osobowej grupy złożonej z n mężczyzn i n kobiet.
Oczywiście, z jednej strony, sposobów wyboru n spośród 2n osób jest 2n po n.
Alternatywnie zauważmy, że wybierając n osób wybieramy i mężczyzn oraz n-i kobiet dla pewnego $i \in \{0,...,n\}$