Podział permutacji na cykle

- Typ permutacji $\pi \in S_n$ to wektor $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ gdzie α_i jest liczbą i-elementowych cykli w rozkładzie π. Możemy go zapisać jako $[1^{\alpha 1} 2^{\alpha 2} \ldots n^{\alpha n}]$
- np. dla $\pi = \{3,6,2,4,0,5,1\}$ mamy:
  - $\pi = (0,3,4)(1,6)(2)(4)$
  - π jest typu $[1^2 2^1 3^1]$

Podział permutacji na cykle

- $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = c(\pi)$
- $1\alpha_1 + 2\alpha_2 \ldots + n\alpha_n = n$
- Liczba permutacji w S_n typu $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ to
-

$$\frac{n!}{1^{a_1} 2^{a_2} \ldots n^{a_n} a_1! \ldots a_n!}$$

-
- np. liczba permutacji dla $3^1 = 3!/3^1 1! = 2$

Permutacja sprzężona

- Permutacja sprzężona do permutacji $\pi, \rho \in S_n$ to każda permutacja postaci $\sigma\pi\sigma^{-1}$, gdzie $\sigma \in S_n$
- Permutacje $\pi, \rho \in S_n$ mają ten sam typ wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzężone.

Transpozycja

- Transpozycja to permutacja w S_n (dla n<=2) typu $[1^{n-2}2^1]$. Innymi słowy, transpozycja dokonuje tylko jednego przestawienia dwóch elementów ze zbioru n-elementowego.
- Np. Dla permutacji $\pi \in S_7$ zadanej jako {0,1,5,3,4,2,6} mamy:
  - $\pi = (0)(1)(25)(3)(4)(6)$
  - π ma typ $[1^5 2^1]$
  - π jest transpozycją

Transpozycja

- Dowolny cykl z S_n jest złożeniem n-1 transpozycji. Np. $\pi = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0\}$ jest następującym złożeniem transpozycji: $(x_0, x_{n-1})(x_0, x_{n-2})\ldots(x_0, x_2)(x_0, x_1)$
- Np. dla $\pi = (0,2,5)(1,3,4,6)$
  - $(1,3,4,6) = (1,6)(1,4)(1,3)$
  - $(0,2,5) = (0,5)(0,2)$
  - $\pi = (0,5)(0,2)(1,6)(1,4)(1,3) = (1,6)(1,4)(1,3)(0,5)(0,2)$

Parzystość permutacji

- Permutacja parzysta to permutacja będąca złożeniem parzystej liczby transpozycji.
- Permutacja nieparzysta to permutacja będąca złożeniem nieparzystej liczby transpozycji.
- Znak permutacji π to $\mathrm{sgn}(\pi)=(-1)^r$, gdzie r jest liczbą transpozycji, na które można rozłożyć π.
- sgn(idx) = 1
- $\mathrm{sgn}(\sigma\pi) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\pi)$
- $\mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi^{-1})$

Liczby Stirlinga

- Liczba Stirlinga dla cykli $\left[{n \atop k}\right]$ (często nazywana liczbą Stirlinga pierwszego rodzaju) to liczba permutacji zbioru n-elementowego złożonych z dokładnie k cykli, czyli takich permutacji $\pi \in S_n$, że $c(\pi)=k$. Przyjmujemy, że $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$, a więc że jest jedna permutacja zbioru pustego bez cykli (funkcja pusta). Przyjmujemy, że $\left[{n \atop k}\right] = 0$ dla $k<0$.
- Permutacje Z_4 złożone z 2 cykli:
  - (012)(3) (021)(3) (023)(1) (032)(1)
  - (013)(2) (031)(2) (123)(0) (132)(0)
  - (01)(23) (02)(13) (03)(12) czyli $\left[{4 \atop 2}\right] = 11$

Liczby Stirlinga

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \; dla \; n > 0$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0 \; dla \; k > n$$

$$\sum_{i=0..\mathrm{n}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! \quad (liczba \; permutacji)$$

$$\sum_{i=0..\mathrm{n}} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! \, H_n$$

Trójkąt Stirlinga dla cykli

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \quad dla \quad 0 < k \leqslant n$$

1						
0	1					
0	1	1				
0	2	3	1			
0	6	11	6	1		
0	24	50	35	10	1	
0	120	274	225	85	15	1

Liczby Stirlinga dla podziałów

- Liczba Stirlinga dla podziałów $\left\{ {n \atop k} \right\}$ (często nazywana liczbą Stirlinga drugiego rodzaju) to liczba podziałów zbioru n-elementowego na dokładnie k bloki (parami rozłączne podzbiory). Znów przyjmujemy, że $\left\{ {0 \atop 0} \right\}$ =1 oraz $\left\{ {n \atop k} \right\}$ =0 dla k<0.
- Permutacje Z_4 złożone z 2 bloków:
  - {012}{3} {023}{1}
  - {013}{2} {123}{0}
  - {01}{23} {02}{13} {03}{12} czyli $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$

Liczby Stirlinga

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \; dla \; n > 0$$

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \quad dla \; n > 0$$

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \; dla \; n > 0$$

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$$

$$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \le \left[{n \atop k} \right]$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \; dla \; k > n$$

Trójkąt Stirlinga dla podziałów

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \quad dla \quad 0 < k \leqslant n$$

1						
0	1					
0	1	1				
0	1	3	1			
0	1	7	6	1		
0	1	15	25	10	1	
0	1	31	90	65	15	1

Dla skończonych zbiorów X,Y liczba surjekcji

X → Y wynosi: $|Y|!\left\{ \begin{matrix} |X| \\ |Y| \end{matrix} \right\}$

Liczba Bella

- to liczba podziałów zbioru n-elementowego, czyli:
- $$B_n = \sum_{i=0..\mathrm{n}} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\}$$
-
- Kolejne liczby Bella (od n=0):
  - 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975

$$B_{n+1} = \sum_{i=0..\mathrm{n}} \binom{n}{i} B_i$$