

Grafy

- Graf (graf ogólny) to para $G(V,E)$, gdzie:
 - V jest zbiorem wierzchołków, (czasami zwanymi węzłami lub punktami grafu)
 - E jest rodziną (być może powtarzających się) krawędzi, czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V .
- Graf prosty to para $G(V,E)$, gdzie:
 - V jest zbiorem wierzchołków,
 - E jest zbiorem krawędzi między różnymi wierzchołkami, czyli dwu-elementowych podzbiorów V .

Grafy

- Stopień wierzchołka v w grafie G to liczba krawędzi incydentnych z v . Stopień wierzchołka v oznaczany jest jako $\deg v$.
- Jeśli $G(V,E)$ jest grafem ogólnym, to
- $$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$
-
- A zatem liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Grafy

- Dla grafów $G(V, E)$, $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ definiujemy następujące pojęcia:
 - suma grafów $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$,
 - przecięcie grafów $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$,
 - różnica grafów $G_1 - G_2 = (V_1 - V_2, E_1 - E_2)$,
 - podgraf grafu G to graf H , w którym $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$,
 - restrykcja grafu G do podzbioru $X \subseteq V$ to $G|X = (X, \{vw: v, w \in X\})$,

- podgraf indukowany grafu G to graf będący restrykcją grafu G ,
- iloraz grafu G przez relację równoważności $\theta \subseteq V \times V$ na zbiorze jego wierzchołków to graf postaci $G/\theta = (V/\theta, \{\{v/\theta, w/\theta\} : \{v, w\} \in E\})$,
- ściągnięcie zbioru wierzchołków $X \subseteq V$ w grafie G to szczególny przypadek ilorazu G/θ , w którym klasy równoważności wszystkich wierzchołków spoza X są jednoelementowe, a X stanowi dodatkową klasę, tzn. $V/\theta = \{\{v\} : v \in V - X\} \cup \{X\}$. W ten sposób zbiór X został ściągnięty do punktu, którego sąsiadami są sąsiedzi jakiegokolwiek wierzchołka z X . Z drugiej strony, jeśli $\theta \subseteq V \times V$ jest relacją równoważności o klasach X_1, \dots, X_k , to ściągając w grafie G kolejno zbiory X_1, \dots, X_k otrzymamy graf ilorazowy G/θ .

Graf skierowany

- Graf skierowany (lub inaczej digraf) to para $D=(V,E)$, gdzie
 - V jest zbiorem wierzchołków,
 - E jest zbiorem krawędzi skierowanych, czyli $E \subseteq V \times V$.
- Krawędź digrafu (czyli uporządkowaną parę) vw graficznie przedstawiamy jako strzałkę.
- Graf szkieletowy digrafu D to graf otrzymany z D poprzez zaniedbanie (usunięcie) kierunku krawędzi, ale nie samych krawędzi.

Rodzaje grafów

- Graf pełny to graf, w którym każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią. Graf pełny nazywany jest także kliką i oznaczany przez K_n , gdzie n jest liczbą jego wierzchołków.
- Liczba krawędzi w klicie K_n wynosi $n(n-1)/2$.
- Graf pusty (inaczej antyklika, graf niezależny) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznaczać będziemy przez A_n .

Graf dwudzielny

- Graf dwudzielny to graf $G=(V,E)$, w którym zbiór V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 oraz V_2 tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru V_i nie były sąsiadami. Czasem, dla podkreślenia takiego podziału, graf dwudzielny będziemy oznaczać przez $(V_1 \cup V_2, E)$. Zauważmy jednak, że podział taki nie jest jednoznaczny - np. w antyklicie A_n dowolny podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory jest podziałem dwudzielnym.

Pełny graf dwudzielny

- Pełny graf dwudzielny to graf dwudzielny $G=(V_1 \cup V_2, E)$, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem z V_2 . Pełny graf dwudzielny oznaczamy będziemy przez $K_{r,s}$, gdzie r jest rozmiarem V_1 , a s rozmiarem V_2 .

Marszruta

- Marszruta w grafie G z wierzchołka w do wierzchołka u to skończony ciąg krawędzi w postaci $wv_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}u$.
- W skrócie marszrutę taką oznaczamy przez $w \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow u$.
- Wierzchołek w nazywać będziemy początkowym, a u końcowym wierzchołkiem marszruty.
- Długość marszruty $w \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow u$ to liczba jej krawędzi.

Marszruta

- Marszruta zamknięta to marszruta kończąca się w punkcie wyjścia, czyli taka, w której $w=u$.
- Droga to marszruta bez powtarzających się wierzchołków. Droga nazywana jest też często ścieżką.
- Cykl to marszruta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (będący oczywiście również jej końcem).

Graf spójny

- Graf spójny to graf, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga. Graf niespójny to graf, który nie jest spójny.
- Spójna składowa grafu $G=(V,E)$ to maksymalny (w sensie inkluzji) podzbiór $X\subseteq V$, indukujący graf spójny $G|X$.
- Dowolnym graf G rozpada się na spójne składowe, tworzące podział zbioru V . Grafy spójne mają jedynie jedną spójną składową, w przeciwieństwie do grafów niespójnych posiadających ich więcej.

Graf spójny

- Rozkład na spójne składowe wyznacza relację równoważności $\sigma \subseteq V \times V$, dla której graf ilorazowy G/σ jest antykliką.
- Wierzchołek izolowany to wierzchołek nie posiadający sąsiadów. Punkty izolowane tworzą jednoelementowe spójne składowe.
- W grafie prostym $G=(V,E)$ o k składowych spójnych liczba jego krawędzi spełnia nierówność $|V|-k \leq |E| \leq (|V|-k)(|V|-k+1)/2$.
- Dla grafu spójnego: $|V|-1 \leq |E| \leq |V|(|V|-1)/2$

Drzewa i las

- Las to graf nie zawierający cykli jako podgrafy.
- Drzewo to graf spójny nie zawierający cykli, czyli spójny las.
- Liść drzewa to wierzchołek o stopniu 1.
- Gwiazda to drzewo, w którym co najwyżej jeden wierzchołek nie jest liściem.
- Drzewo rozpinające grafu G to podgraf grafu G zawierający wszystkie jego wierzchołki i będący drzewem.

Równoważne definicje

- T jest drzewem,
- T nie zawiera cykli i ma $|V|-1$ krawędzi,
- T jest spójny i ma $|V|-1$ krawędzi,
- T jest spójny, zaś usunięcie dowolnej krawędzi tworzy dokładnie dwie składowe,
- dowolne dwa wierzchołki grafu T są połączone dokładnie jedną drogą,
- T nie zawiera cykli, lecz dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.

Las

- Każdy las $G=(V,E)$ o k składowych spójnych posiada $|E|=|V|-k$ krawędzi.

Graf Eulera

- Graf $G(V,E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i stopień każdego wierzchołka jest parzysty.
- Graf spójny jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy rodzinę jego krawędzi da się podzielić na rozłączne krawędziowo cykle.

Graf jednokreślny

- Graf jednokreślny to graf posiadający marszrutę przechodzącą dokładnie raz przez każdą krawędź.
- Graf $G(V,E)$ jest jednokreślny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i jego wszystkie, poza co najwyżej dwoma wierzchołkami, mają parzysty stopień.

Graf hamiltonowski

- Cykl Hamiltona to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu (czyli marszruta zamknięta odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz).
- Graf hamiltonowski to graf posiadający cykl Hamiltona.
- Ścieżka Hamiltona to ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki, każdy odwiedzając jedynie jeden raz.

Twierdzenie Diraca (1952)

- Graf prosty $G(V,E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej $|V|/2$ jest hamiltonowski.

Twierdzenie Ore (1960)

- Jeśli w grafie prostym $G(V,E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach dowolne dwa niesąsiednie wierzchołki v i w spełniają
$$\deg v + \deg w \geq |V|,$$
to graf G jest hamiltonowski.

- Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego cykl ma parzystą długość.
- Skojarzenie w grafie dwudzielnym $G(V_1 \cup V_2, E)$ to podzbiór krawędzi $M \subseteq E(G)$, w którym żadne dwie $v_1 v_2, u_1 u_2 \in M$ nie wychodzą z tego samego wierzchołka.
- $v \in V_i$ jest skojarzony, jeśli istnieje $w \in V_{3-i}$ taki, że krawędź vw należy do skojarzenia.
- Pełne skojarzenie V_1 z V_2 w grafie dwudzielnym $G(V_1 \cup V_2, E)$ to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony.

- Graf k -spójny to graf, który po usunięciu dowolnie wybranych $k-1$ wierzchołków (i incydujących z nimi krawędzi) pozostaje spójny.
- Graf k -spójny krawędziowo to graf, który po usunięciu dowolnie wybranych $k-1$ krawędzi (bez usuwania wierzchołków) pozostaje spójny.
 - Grafy 1-spójne lub 1-spójne krawędziowo to po prostu grafy spójne.
 - Drzewa są spójne, ale nie 2-spójne i nie 2-spójne krawędziowo.
 - Klika K_n jest n -spójna i $n-1$ -spójna krawędziowo.

- Zbiór rozdzielający wierzchołki u, v to zbiór wierzchołków $S \subseteq V - \{u, v\}$ taki, że każda droga z u do v przechodzi przez któryś element ze zbioru S .
- Ponadto powiemy, że S jest zbiorem rozdzielającym, jeśli S jest zbiorem rozdzielającym jakichś dwu wierzchołków u, v .
- Zbiór rozspajający wierzchołki u, v to zbiór krawędzi $F \subseteq E$ taki, że każda droga z u do v zawiera jakąś krawędź z F .

- Rozcięcie wierzchołków u, v to zbiór rozspajający wierzchołki u, v , którego żaden podzbiór właściwy nie rozspaja u z v .
- Zbiór krawędzi F będziemy nazywać rozcięciem, jeśli F jest rozcięciem jakichś dwu wierzchołków u, v
- Most to taka krawędź e , że zbiór $\{e\}$ tworzy rozcięcie.

Twierdzenie Menger'a (1927)

- Największa możliwa liczba krawędziowo rozłącznych dróg łączących dwa różne niesąsiednie wierzchołki grafu spójnego, jest równa najmniejszej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym te wierzchołki.
- Największa możliwa liczba wierzchołkowo rozłącznych dróg łączących dwa różne niesąsiednie wierzchołki grafu spójnego, jest równa najmniejszej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym te wierzchołki.

Sieć

- Sieć to trójka $N=(V,A,c)$, w której:
 - (V,A) jest pełnym digrafem (czyli $A=V \times V$),
 - funkcja $c:E \rightarrow [0, +\infty)$, zwana przepustowością sieci, każdej krawędzi vw przypisuje nieujemną liczbę rzeczywistą $c(vw)$.
 - Ponadto wyróżnia się dwa wierzchołki $s, t \in V$, które są odpowiednio źródłem oraz ujściem sieci.

- Przepływ w sieci $N=(V,A,c)$ to funkcja $f:E\rightarrow[0,+\infty)$ spełniająca warunki:
 - $0\leq f(vw)\leq c(vw)$ dla każdej krawędzi vw . Wartość przepływu daną krawędzią nie może przekroczyć przepustowości tej krawędzi.
 - $\sum_{x\in V} f(xv)=\sum_{x\in V} f(vx)$ dla każdego wierzchołka v poza źródłem s i ujściem t (sumaryczna wartość tego, co wpływa do wierzchołka jest równa sumarycznej wartości tego, co zeń wypływa).
 - $\sum_{x\in V} (f(sx)-f(xs))=\sum_{x\in V} (f(xt)-f(tx))$ (sumaryczna wartość tego, co wypływa ze źródła musi być równa sumarycznej wartości tego, co wpływa do ujścia. Wartość ta będzie określana wartością przepływu f).

- Przekrój sieci to para podzbiorów (S, T) zbioru wierzchołków V , taka że:
 - S, T tworzą podział V , tzn. są rozłączne i w sumie dają cały zbiór V ,
 - źródło s należy do S , a ujście t należy do zbioru T .
- Przepustowość przekroju (S, T) to suma

$$c(S, T) = \sum_{v \in S, w \in T} c(vw)$$

Twierdzenie Forda i Fulkersona (1956)

- W dowolnej sieci wartość maksymalnego przepływu jest równa przepustowości minimalnego przekroju.

Zadania domowe

1. Przedstaw cztery pięciowierzchołkowe grafy -- kolejno graf który:

- * nie jest hamiltonowski i nie jest eulerowski
- * nie jest hamiltonowski, ale jest eulerowski
- * jest hamiltonowski i nie jest eulerowski
- * jest hamiltonowski i eulerowski.

2. Określ, czy poniższe grafy są hamiltonowskie lub eulerowskie:

- * graf dwudzielny $K_{3,3}$
- * pełny graf 100-elementowy
- * klika K_{101}

Graf płaski

- (podkreślenia u góry) Graf płaski to para $\underline{G}=(\underline{V},\underline{E})$, gdzie:
 - \underline{V} jest jakimś zbiorem punktów płaszczyzny \mathbb{R}^2 ,
 - \underline{E} jest zbiorem nie przecinających się odcinków lub łuków w \mathbb{R}^2 o końcach ze zbiorze \underline{V} .
- Graf planarny to graf, który jest prezentowalny jako graf płaski.
- Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.

- Graf G_1 jest homeomorficzny z grafem G_2 , jeśli jeden otrzymamy z drugiego poprzez wykonanie skończenie wielu poniższych operacji:
 - Dodawanie wierzchołków stopnia dwa na krawędzi. Jeśli $uw \in E(G_1)$ oraz $x \notin V(G_1)$, to operacja ta zastępuje graf $(V(G_1), E(G_1))$ grafem $(V(G_1) \cup \{x\}, E(G_1) \cup \{ux, xw\} - \{uw\})$.
 - Usuwanie wierzchołków stopnia dwa. Jeśli $x \in V(G_1)$ ma jedynie dwóch sąsiadów u, w , to operacja ta zastępuje graf $(V(G_1), E(G_1))$ grafem $(V(G_1) - \{x\}, E(G_1) \cup \{uw\} - \{ux, xw\})$.

Twierdzenie Kuratowskiego (1930)

- Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden jego podgraf nie jest homeomorficzny z K_5 ani z $K_{3,3}$.

Grafy planarne

- Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu ściągającego do K_5 lub $K_{3,3}$.

Ściany

- Ściana w grafie płaskim G to spójny obszar płaszczyzny po usunięciu linii reprezentujących krawędzie, tzn. $\mathbb{R}^2 - \bigcup E(G)$. Innymi słowy ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi.
- Wszystkie grafy płaskie mają dokładnie jedną ścianę nieskończoną.

Twierdzenie Eulera (1750)

- W grafie płaskim $G=(V,E)$ o f ścianach i $k \geq 1$ składowych spójnych zachodzi
$$|V| - |E| + f = k + 1$$
- Liczba ścian zależy jedynie od liczby wierzchołków, krawędzi, oraz spójnych składowych. Tak więc w każdej reprezentacji płaskiej musi być taka sama.

- Graf dualny geometrycznie do grafu płaskiego $G(V,E)$ to graf płaski $G^*(V^*,E^*)$ skonstruowany w następujący sposób:
 - Z każdej ściany grafu G wybieramy po jednym punkcie. Tak wybrane punkty tworzą zbiór wierzchołków V^* .
 - Jeśli krawędź po jednej stronie sąsiadowała ze ścianą f_1 , a po drugiej z f_2 to w grafie G^* odpowiadające ścianom f_1, f_2 wierzchołki v_1^*, v_2^* łączymy krawędzią $v_1^*v_2^*$. Tak wybrane krawędzie tworzą zbiór E^* .
- Jeśli G jest spójnym grafem płaskim, to G^{**} jest izomorficzny z G .

Kolorowanie grafu

- Kolorowanie grafu $G(V,E)$ to funkcja $c:V \rightarrow N$ taka, że $c(v) \neq c(w)$ ilekroć vw jest krawędzią grafu G .
- Kolorowanie grafu G na k kolorów wyznacza rozbitcie zbioru V na sumę rozłączną $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$ jednobarwnych zbiorów V_i , przy czym każdy graf indukowany postaci $G|V_i$ jest antykliką.

Kolorowanie grafu

- Graf k -kolorowalny (k -barwny) to graf dający się pokolorować k barwami.
- Liczba chromatyczna grafu, $\chi(G)$, to najmniejsza liczba barw, którymi można pokolorować graf G .
- Optymalne kolorowanie grafu G to kolorowanie używające dokładnie $\chi(G)$ kolorów.
- Graf, którego wszystkie wierzchołki mają stopień nie większy niż k jest $(k+1)$ -kolorowalny.

Kolorowanie grafu

- Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy jest 2-kolorowalny.
- Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny.
(udowodnione metodami automatycznego dowodzenia twierdzeń)

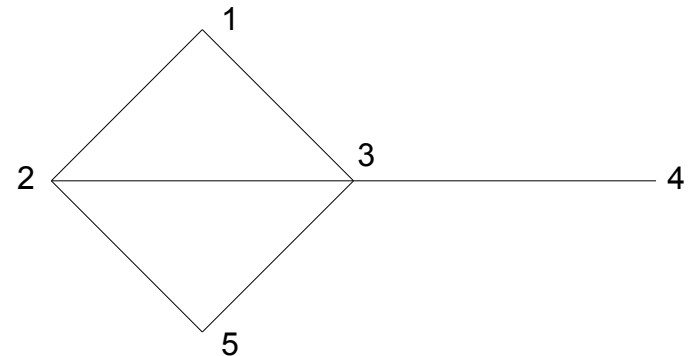
- Mapa to graf płaski nie zawierający mostów.
- Mapa ma k -kolorowalne ściany jeśli jej ściany można pokolorować k kolorami w ten sposób, by żadne dwie graniczące ze sobą ściany nie miały tego samego koloru. Innymi słowy, mapa M ma k -kolorowalne ściany, jeśli jej geometrycznie dualny graf M^* jest k -kolorowalny.
- Mapa M ma 2-kolorowalne ściany wtedy i tylko wtedy, gdy graf M jest eulerowski.
- Każda mapa ma 4-kolorowalne ściany.

Liczba stopniowa grafu

- Niech $G=(\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ będzie grafem prostym. Przy każdej permutacji $\rho:\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ każdemu wierzchołkowi $v_{\rho(i)}$ przypisana jest liczba sąsiadów $n_{\rho(i)}^\rho$ w zbiorze wierzchołków o indeksie mniejszym niż $\rho(i)$. Liczba stopniowa jest równa

$$\chi_s(G) = \min_{\rho} \max_{i=1, \dots, n} n_i^\rho$$

- np. $\rho(i) = \{5, 2, 3, 1, 4\}$
 - $\max_{i=1, \dots, n} n_i^\rho = 2 = \chi_s(G)$



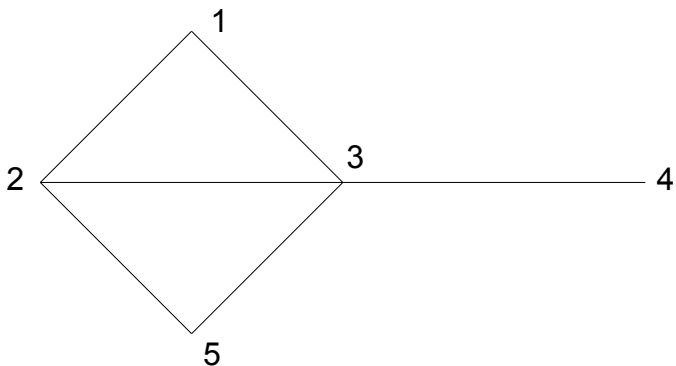
Liczba stopniowa grafu

- Jeżeli G jest grafem prostym, to
$$\chi(G) \leq \chi_s(G) + 1$$

Macierz sąsiedztwa

- Macierz sąsiedztwa $A(G)$ grafu prostego $G=(\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ to zero-jedynkowa macierz $\langle a_{ij} \rangle$ rozmiaru $n \times n$, gdzie

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } v_i, v_j \in E \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

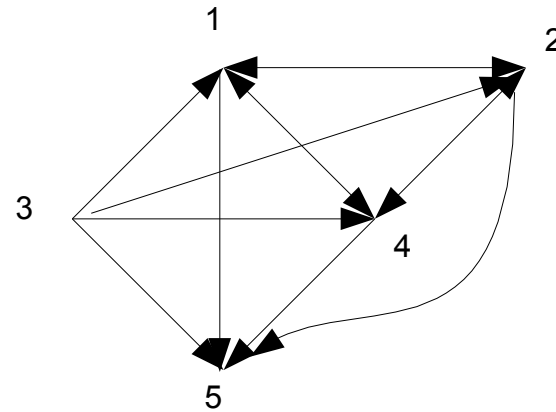
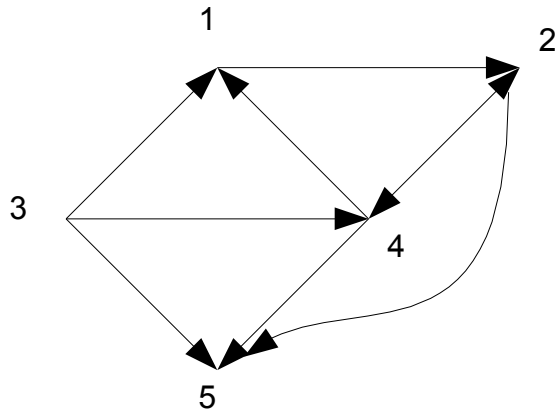


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Domknięcie przechodnie

- Domknięcie przechodnie grafu skierowanego G , to graf $TC(G)$ taki, że:
 - $V(TC(G))=V(G)$, oraz
 - $vw \in E(TC(G))$ wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G istnieje skierowana marszruta z v do w .
- Niech $G=(\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ będzie grafem skierowanym. Wtedy liczba skierowanych marszrut z v_i do v_j jest dana elementem a_{ij} macierzy:
$$\langle a_{ij} \rangle = A(G)^1 + A(G)^2 + \dots + A(G)^{n-1}$$

Domknięcie przechodnie



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1 \dots 4} A(G)^i = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

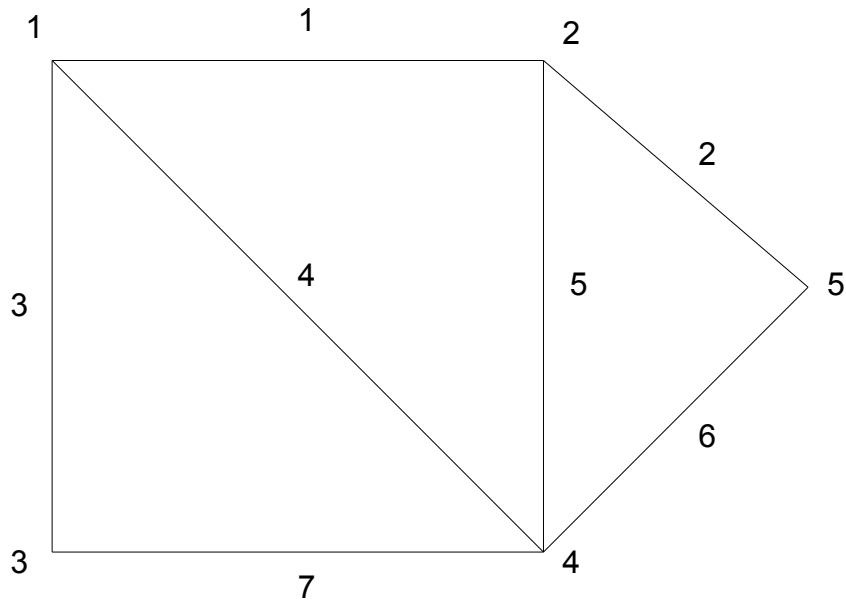
Macierz incydencji

- Macierz incydencji $B(G)$ grafu $G=(\{v_1, \dots, v_n\}, \{e_1, \dots, e_m\})$ to zero-jedynkowa macierz $\langle b_{ij} \rangle$ rozmiaru $n \times m$, gdzie

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli wierzchołek } v_i \text{ jest incydentny z krawędzią } e_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- Zorientowana macierz incydencji $C(G)$ grafu prostego to macierz $\langle c_{ij} \rangle$, rozmiaru $n \times m$, otrzymana z macierzy incydencji $B(G)$ poprzez zastąpienie w każdej kolumnie jednej z dwu jedynek przez -1 (minus jeden).

Macierz incydencji



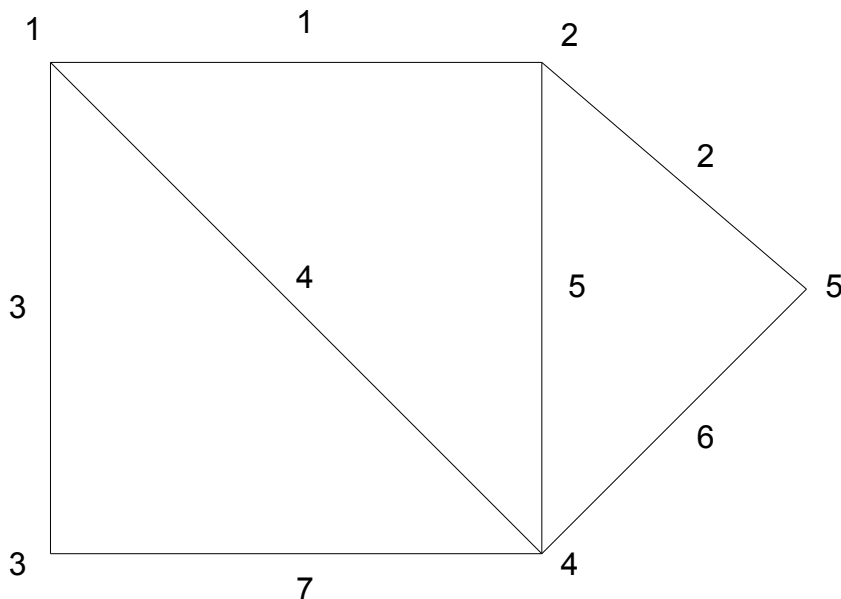
$$B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(G) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz stopni

- Macierz stopni $D(G)$ grafu $G=(\{v_1, \dots, v_n\}, E)$ to diagonalna macierz $\langle d_{ij} \rangle$ rozmiaru $n \times n$, gdzie

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{deg } v_i & \text{jeżeli } i = j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$



$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Jeśli $G(V,E)$ jest grafem prostym to

$$B(G) * B(G)^T = D(G) + A(G)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$