Grafy

- Graf (graf ogólny) to para G(V,E), gdzie:
  - V jest zbiorem wierzchołków, (czasami zwanymi węzłami lub punktami grafu)
  - E jest rodziną (być może powtarzających się) krawędzi, czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.
- Graf prosty to para G(V,E), gdzie:
  - V jest zbiorem wierzchołków,
  - E jest zbiorem krawędzi między różnymi wierzchołkami, czyli dwu-elementowych podzbiorów V.

Grafy

- Stopień wierzchołka v w grafie G to liczba krawędzi incydentnych z v. Stopień wierzchołka v oznaczany jest jako deg v.
- Jeśli G(V,E) jest grafem ogólnym, to
- $$\sum_{v \in V} deg\, v = 2|E|$$
-
- A zatem liczba wierzchołków o nieparzystym stopniu jest parzysta.

Grafy

- Dla grafów $G(V,E)$, $G_1(V_1,E_1)$, $G_2(V_2,E_2)$ definiujemy następujące pojęcia:
  - suma grafów $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$,
  - przecięcie grafów $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$,
  - różnica grafów $G_1 - G_2 = (V_1 - V_2, E_1 - E_2)$,
  - podgraf grafu G to graf H, w którym $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$,
  - restrykcja grafu G do podzbioru $X \subseteq V$ to $G|X = (X, \{vw\colon v,w \in X\})$,

- podgraf indukowany grafu G to graf będący restrykcją grafu G,
- iloraz grafu G przez relację równoważności $\theta \subseteq VxV$ na zbiorze jego wierzchołków to graf postaci $G/\theta = (V/\theta, \{\{v/\theta, w/\theta\}: \{v,w\} \in E\})$,
- ściągnięcie zbioru wierzchołków $X \subseteq V$ w grafie G to szczególny przypadek ilorazu G/θ, w którym klasy równoważności wszystkich wierzchołków spoza X są jednoelementowe, a X stanowi dodatkową klasę, tzn. $V/\theta=\{\{v\}:v\in V-X\}\cup\{X\}$. W ten sposób zbiór X został ściągnięty do punktu, którego sąsiadami są sąsiedzi jakiegokolwiek wierzchołka z X. Z drugiej strony, jeśli $\theta \subseteq VxV$ jest relacją równoważności o klasach $X_1,...,X_k$, to ściągając w grafie G kolejno zbiory $X_1,...,X_k$ otrzymamy graf ilorazowy G/θ.

Graf skierowany

- Graf skierowany (lub inaczej digraf) to para D=(V,E), gdzie
  - V jest zbiorem wierzchołków,
  - E jest zbiorem krawędzi skierowanych, czyli $E \subseteq V x V$.
- Krawędź digrafu (czyli uporządkowaną parę) vw graficznie przedstawiamy jako strzałkę.
- Graf szkieletowy digrafu D to graf otrzymany z D poprzez zaniedbanie (usunięcie) kierunku krawędzi, ale nie samych krawędzi.

Rodzaje grafów

- Graf pełny to graf, w którym każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią. Graf pełny nazywany jest także kliką i oznaczany przez K_n, gdzie n jest liczbą jego wierzchołków.
- Liczba krawędzi w klice K_n wynosi n(n-1)/2.
- Graf pusty (inaczej antyklika, graf niezależny) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznaczać będziemy przez A_n.

Graf dwudzielny

- Graf dwudzielny to graf $G=(V,E)$, w którym zbiór V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 oraz V_2 tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru V_i nie były sąsiadami. Czasem, dla podkreślenia takiego podziału, graf dwudzielny będziemy oznaczać przez $(V_1 \cup V_2, E)$. Zauważmy jednak, że podział taki nie jest jednoznaczny - np. w antyklice A_n dowolny podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory jest podziałem dwudzielnym.

Pełny graf dwudzielny

- Pełny graf dwudzielny to graf dwudzielny $G=(V_1 \cup V_2, E)$, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem z V_2. Pełny graf dwudzielny oznaczać będziemy przez $K_{r,s}$, gdzie r jest rozmiarem V_1, a s rozmiarem V_2.

Marszruta

- Marszruta w grafie G z wierzchołka w do wierzchołka u to skończony ciąg krawędzi w postaci $wv_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}u$.
- W skrócie marszrutę taką oznaczamy przez $w \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u$.
- Wierzchołek w nazywać będziemy początkowym, a u końcowym wierzchołkiem marszruty.
- Długość marszruty $w \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u$ to liczba jej krawędzi.

Marszruta

- Marszruta zamknięta to marszruta kończąca się w punkcie wyjścia, czyli taka, w której w=u.
- Droga to marszruta bez powtarzających się wierzchołków. Droga nazywana jest też często ścieżką.
- Cykl to marszruta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (będący oczywiście również jej końcem).

Graf spójny

- Graf spójny to graf, w którym między dwoma dowolnymi wierzchołkami istnieje droga. Graf niespójny to graf, który nie jest spójny.
- Spójna składowa grafu G=(V,E) to maksymalny (w sensie inkluzji) podzbiór $X \subseteq V$, indukujący graf spójny G|X.
- Dowolnym graf G rozpada się na spójne składowe, tworzące podział zbioru V. Grafy spójne mają jedynie jedną spójną składową, w przeciwieństwie do grafów niespójnych posiadających ich więcej.

Graf spójny

- Rozkład na spójne składowe wyznacza relację równoważności $\sigma \subseteq V \times V$, dla której graf ilorazowy G/σ jest antykliką.
- Wierzchołek izolowany to wierzchołek nie posiadający sąsiadów. Punkty izolowane tworzą jednoelementowe spójne składowe.
- W grafie prostym $G=(V,E)$ o k składowych spójnych liczba jego krawędzi spełnia nierówności $|V|-k \leqslant |E| \leqslant (|V|-k)(|V|-k+1)/2$.
- Dla grafu spójnego: $|V|-1 \leqslant |E| \leqslant |V|(|V|-1)/2$

Drzewa i las

- Las to graf nie zawierający cykli jako podgrafy.
- Drzewo to graf spójny nie zawierający cykli, czyli spójny las.
- Liść drzewa to wierzchołek o stopniu 1.
- Gwiazda to drzewo, w którym co najwyżej jeden wierzchołek nie jest liściem.
- Drzewo rozpinające grafu G to podgraf grafu G zawierający wszystkie jego wierzchołki i będący drzewem.

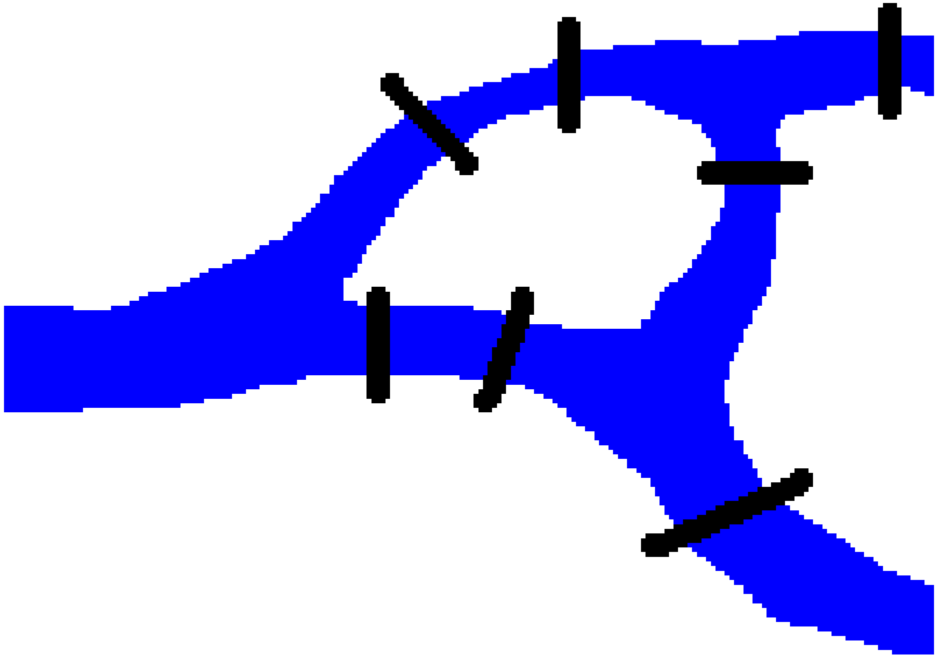
Równoważne definicje

- T jest drzewem,
- T nie zawiera cykli i ma |V|-1 krawędzi,
- T jest spójny i ma |V|-1 krawędzi,
- T jest spójny, zaś usunięcie dowolnej krawędzi tworzy dokładnie dwie składowe,
- dowolne dwa wierzchołki grafu T są połączone dokładnie jedną drogą,
- T nie zawiera cykli, lecz dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.

Las

- Każdy las $G=(V,E)$ o k składowych spójnych posiada $|E|=|V|-k$ krawędzi.

Graf Eulera



- Cykl Eulera to zamknięta marszruta przechodząca przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.
- Graf eulerowski to graf posiadający cykl Eulera.

Graf Eulera

- Graf G(V,E) jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i stopień każdego wierzchołka jest parzysty.
- Graf spójny jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy rodzinę jego krawędzi da się podzielić na rozłączne krawędziowo cykle.

Graf jednokreślny

- Graf jednokreślny to graf posiadający marszrutę przechodzącą dokładnie raz przez każdą krawędź.
- Graf G(V,E) jest jednokreślny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny i jego wszystkie, poza co najwyżej dwoma wierzchołkami, mają parzysty stopień.

Graf hamiltonowski

- Cykl Hamiltona to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu (czyli marszruta zamknięta odwiedzająca każdy wierzchołek dokładnie raz).
- Graf hamiltonowski to graf posiadający cykl Hamiltona.
- Ścieżka Hamiltona to ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki, każdy odwiedzając jedynie jeden raz.

Twierdzenie Diraca (1952)

- Graf prosty G(V,E), w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej |V|/2 jest hamiltonowski.

Twierdzenie Ore (1960)

- Jeśli w grafie prostym G(V,E) o co najmniej 3 wierzchołkach dowolne dwa niesąsiednie wierzchołki v i w spełniają
$$\deg v + \deg w \geqslant |V|,$$
to graf G jest hamiltonowski.

- Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego cykl ma parzystą długość.
- Skojarzenie w grafie dwudzielnym $G(V_1 \cup V_2, E)$ to podzbiór krawędzi $M \subseteq E(G)$, w którym żadne dwie $v_1v_2, u_1u_2 \in M$ nie wychodzą z tego samego wierzchołka.
- $v \in V_i$ jest skojarzony, jeśli istnieje $w \in V_{3-i}$ taki, że krawędź vw należy do skojarzenia.
- Pełne skojarzenie V_1 z V_2 w grafie dwudzielnym $G(V_1 \cup V_2, E)$ to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony.

- Graf k-spójny to graf, który po usunięciu dowolnie wybranych k-1 wierzchołków (i incydentnych z nimi krawędzi) pozostaje spójny.
- Graf k-spójny krawędziowo to graf, który po usunięcie dowolnie wybranych k-1 krawędzi (bez usuwania wierzchołków) pozostaje spójny.
  - Grafy 1-spójne lub 1-spójne krawędziowo to po prostu grafy spójne.
  - Drzewa są spójne, ale nie 2-spójne i nie 2-spójne krawędziowo.
  - Klika K_n jest n-spójna i n-1-spójna krawędziowo.

- Zbiór rozdzielający wierzchołki u,v to zbiór wierzchołków $S \subseteq V-\{u,v\}$ taki, że każda droga z u do v przechodzi przez któryś element ze zbioru S.
- Ponadto powiemy, że S jest zbiorem rozdzielającym, jeśli S jest zbiorem rozdzielającym jakichś dwu wierzchołków u,v.
- Zbiór rozspajający wierzchołki u,v to zbiór krawędzi $F \subseteq E$ taki, że każda droga z u do v zawiera jakąś krawędź z F.

- Rozcięcie wierzchołków u,v to zbiór rozspajający wierzchołki u,v, którego żaden podzbiór właściwy nie rozspaja u z v.
- Zbiór krawędzi F będziemy nazywać rozcięciem, jeśli F jest rozcięciem jakichś dwu wierzchołków u,v
- Most to taka krawędź e, że zbiór {e} tworzy rozcięcie.

Twierdzenie Mengera (1927)

- Największa możliwa liczba krawędziowo rozłącznych dróg łączących dwa różne niesąsiednie wierzchołki grafu spójnego, jest równa najmniejszej liczbie krawędzi w zbiorze rozspajającym te wierzchołki.
- Największa możliwa liczba wierzchołkowo rozłącznych dróg łączących dwa różne niesąsiednie wierzchołki grafu spójnego, jest równa najmniejszej liczbie wierzchołków w zbiorze rozdzielającym te wierzchołki.

Sieć

- Sieć to trójka N=(V,A,c), w której:
  - (V,A) jest pełnym digrafem (czyli A=VxV),
  - funkcja $c: E \to [0,+\infty)$, zwana przepustowością sieci, każdej krawędzi vw przypisuje nieujemną liczbę rzeczywistą c(vw).
  - Ponadto wyróżnia się dwa wierzchołki $s,t \in V$, które są odpowiednio źródłem oraz ujściem sieci.

- Przepływ w sieci N=(V,A,c) to funkcja f:E→[0,+∞) spełniająca warunki:
  - 0≤f(vw)≤c(vw) dla każdej krawędzi vw. Wartość przepływu daną krawędzią nie może przekroczyć przepustowości tej krawędzi.
  - $\sum_{x \in V} f(xv) = \sum_{x \in V} f(vx)$ dla każdego wierzchołka v poza źródłem s i ujściem t (sumaryczna wartość tego, co wpływa do wierzchołka jest równa sumarycznej wartości tego, co zeń wypływa).
  - $\sum_{x \in V} (f(sx) - f(xs)) = \sum_{x \in V} (f(xt) - f(tx))$ (sumaryczna wartość tego, co wypływa ze źródła musi być równa sumarycznej wartości tego, co wpływa do ujścia. Wartość ta będzie określana wartością przepływu f).

- Przekrój sieci to para podzbiorów (S,T) zbioru wierzchołków V, taka że:
  - S,T tworzą podział V, tzn. są rozłączne i w sumie dają cały zbiór V,
  - źródło s należy do S, a ujście t należy do zbioru T.
- Przepustowość przekroju (S,T) to suma

$$c(S,T)=\sum_{v\in S,\, w\in T} c(vw)$$

Twierdzenie Forda i Fulkersona (1956)

- W dowolnej sieci wartość maksymalnego przepływu jest równa przepustowości minimalnego przekroju.

Zadania domowe

1. Przedstaw cztery pięciowierzchołkowe grafy -- kolejno graf który:
   * nie jest hamiltonowski i nie jest eulerowski
   * nie jest hamiltonowski, ale jest eulerowski
   * jest hamiltonowski i nie jest eulerowski
   * jest hamiltonowski i eulerowski.
2. Określ, czy poniższe grafy są hamiltonowskie lub eulerowskie:
   * graf dwudzielny $K_{3,3}$
   * pełny graf 100-elementowy
   * klika K_{101}

Graf płaski

- (podkreślenia u góry) Graf płaski to para G=(V,E), gdzie:
  - V jest jakimś zbiorem punktów płaszczyzny R^2,
  - E jest zbiorem nie przecinających się odcinków lub łuków w R^2 o końcach ze zbiorze V.
- Graf planarny to graf, który jest prezentowalny jako graf płaski.
- Grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne.

- Graf G_1 jest homeomorficzny z grafem G_2, jeśli jeden otrzymamy z drugiego poprzez wykonanie skończenie wielu poniższych operacji:
  - Dodawanie wierzchołków stopnia dwa na krawędzi. Jeśli $uw \in E(G_1)$ oraz $x \notin V(G_1)$, to operacja ta zastępuje graf $(V(G_1),E(G_1))$ grafem $(V(G_1) \cup \{x\}, E(G_1) \cup \{ux,xw\} - \{uw\})$.
  - Usuwanie wierzchołków stopnia dwa. Jeśli $x \in V(G_1)$ ma jedynie dwóch sąsiadów u,w, to operacja ta zastępuje graf $(V(G_1),E(G_1))$ grafem $(V(G_1) - \{x\}, E(G_1) \cup \{uw\} - \{ux,xw\})$.

Twierdzenie Kuratowskiego (1930)

- Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden jego podgraf nie jest homeomorficzny z K_5 ani z $K_{3,3}$.

Grafy planarne

- Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu ściągalnego do K_5 lub $K_{3,3}$.

Ściany

- Ściana w grafie płaskim G to spójny obszar płaszczyzny po usunięciu linii reprezentujących krawędzie, tzn. $R^2 - \coprod E(G)$. Innym słowy ściana to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi.
- Wszystkie grafy płaskie mają dokładnie jedną ścianę nieskończoną.

Twierdzenie Eulera (1750)

- W grafie płaskim $G=(V,E)$ o f ścianach i $k \geq 1$ składowych spójnych zachodzi
$$|V| - |E| + f = k + 1$$
- Liczba ścian zależy jedynie od liczby wierzchołków, krawędzi, oraz spójnych składowych. Tak więc w każdej reprezentacji płaskiej musi być taka sama.

- Graf dualny geometrycznie do grafu płaskiego $G(V,E)$ to graf płaski $G^*(V^*,E^*)$ skonstruowany w następujący sposób:
  - Z każdej ściany grafu G wybieramy po jednym punkcie. Tak wybrane punkty tworzą zbiór wierzchołków V^*.
  - Jeśli krawędź po jednej stronie sąsiadowała ze ścianą f_1, a po drugiej z f_2 to w grafie G^* odpowiadające ścianom f_1,f_2 wierzchołki v_1^*,v_2^* łączymy krawędzią $v_1^*v_2^*$. Tak wybrane krawędzie tworzą zbiór E^*.
- Jeśli G jest spójnym grafem płaskim, to G^{**} jest izomorficzny z G.

Kolorowanie grafu

- Kolorowanie grafu $G(V,E)$ to funkcja $c:V\to N$ taka, że $c(v)\neq c(w)$ ilekroć vw jest krawędzią grafu G.
- Kolorowanie grafu G na k kolorów wyznacza rozbicie zbioru V na sumę rozłączną $V=V_0\cup V_1\cup\ldots\cup V_{k-1}$ jednobarwnych zbiorów V_i, przy czym każdy graf indukowany postaci $G|V_i$ jest antykliką.

Kolorowanie grafu

- Graf k-kolorowalny (k-barwny) to graf dający się pokolorować k barwami.
- Liczba chromatyczna grafu, $\chi(G)$, to najmniejsza liczba barw, którymi można pokolorować graf G.
- Optymalne kolorowanie grafu G to kolorowanie używające dokładnie $\chi(G)$ kolorów.
- Graf, którego wszystkie wierzchołki mają stopień nie większy niż k jest (k+1)kolorowalny.

Kolorowanie grafu

- Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy jest 2-kolorowalny.
- Każdy graf planarny jest 4-kolorowalny. *(udowodnione metodami automatycznego dowodzenia twierdzeń)*

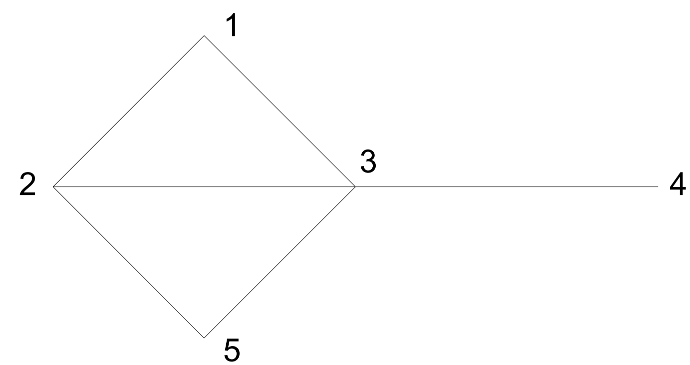
- Mapa to graf płaski nie zawierający mostów.
- Mapa ma k-kolorowalne ściany jeśli jej ściany można pokolorować k kolorami w ten sposób, by żadne dwie graniczące ze sobą ściany nie miały tego samego koloru. Innymi słowy, mapa M ma k-kolorowalne ściany, jeśli jej geometrycznie dualny graf M* jest k-kolorowalny.
- Mapa M ma 2-kolorowalne ściany wtedy i tylko wtedy, gdy graf M jest eulerowski.
- Każda mapa ma 4-kolorowalne ściany.

Liczba stopniowa grafu

- Niech $G=(\{v_1,...,v_n\},E)$ będzie grafem prostym. Przy każdej permutacji $\rho:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$ każdemu wierzchołkowi $v_{\rho(i)}$ przypisana jest liczba sąsiadów $n^{\rho}_{\rho(i)}$ w zbiorze wierzchołków o indeksie mniejszym niż $\rho(i)$. Liczba stopniowa jest równa

$$\chi_s(G)=\min_{\rho}\max_{i=1,...,n}n^{\rho}_{i}$$

- np. $\rho(i)=\{5,2,3,1,4\}$
  - $\max_{i=1,...,n}n^{\rho}_{i}=2=\chi_s(G)$



Liczba stopniowa grafu

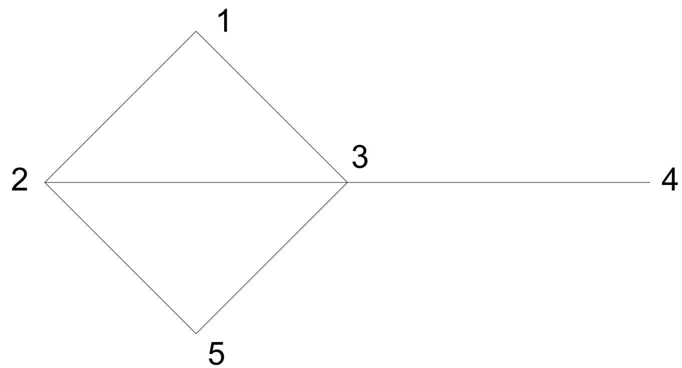
- Jeżeli G jest grafem prostym, to

$$\chi(G) \leq \chi_s(G) + 1$$

Macierz sąsiedztwa

- Macierz sąsiedztwa A(G) grafu prostego G=({v_1,...,v_n},E) to zero-jedynkowa macierz <a_{ij}> rozmiaru n*n, gdzie

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 \textit{ jeżeli } v_i, v_j \in E \\ 0 \textit{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$



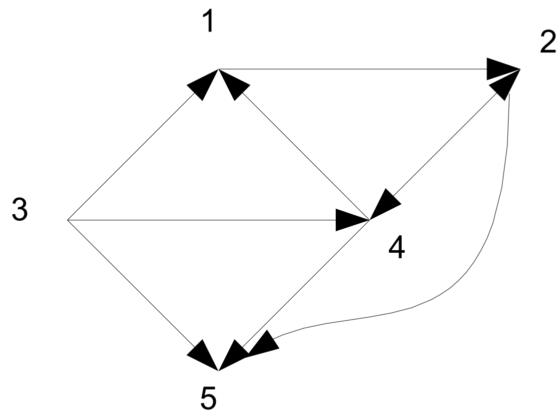
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

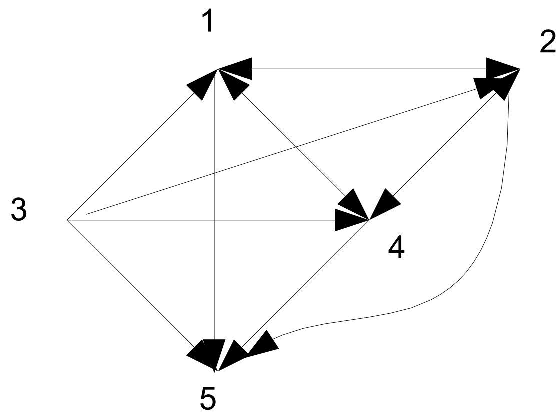
Domknięcie przechodnie

- Domknięcie przechodnie grafu skierowanego G, to graf $TC(G)$ taki, że:
  - $V(TC(G))=V(G)$, oraz
  - $vw \in E(TC(G))$ wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G istnieje skierowana marszruta z v do w.
- Niech $G=(\{v_1,...,v_n\},E)$ będzie grafem skierowanym. Wtedy liczba skierowanych marszrut z v_i do v_j jest dana elementem a_{ij} macierzy:

$$\langle a_{ij} \rangle = A(G)^1 + A(G)^2 + ... + A(G)^{n-1}$$

Domknięcie przechodnie





$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1\ldots4} A(G)^i = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

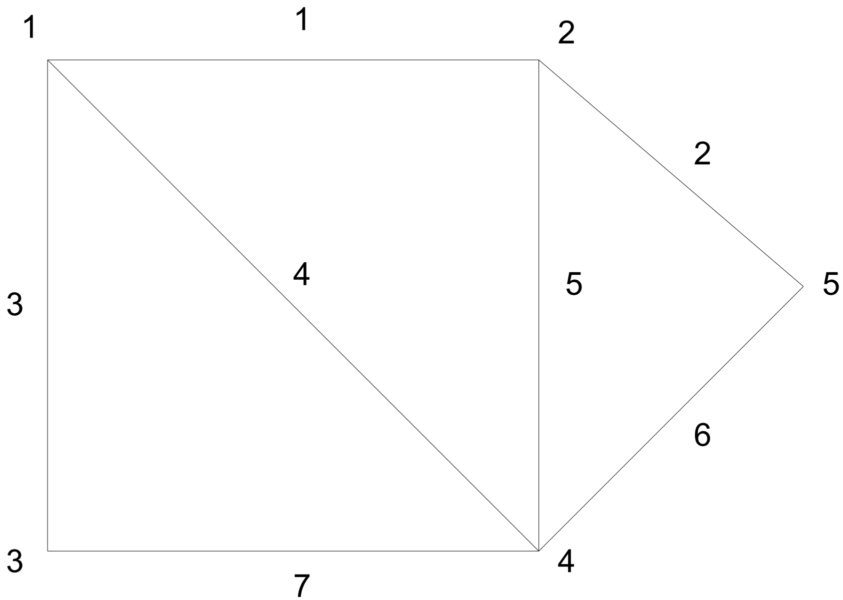
Macierz incydencji

- Macierz incydencji B(G) grafu $G=(\{v_1,...,v_n\},\{e_1,...,e_m\})$ to zero-jedynkowa macierz $<b_{ij}>$ rozmiaru n*m, gdzie

$$b_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 \; jeżeli\; wierzchołek\; v_i \; jest\; incydentny\; z\; krawędzią\; e_j \\ 0 \; w\; przeciwnym\; przypadku \end{Bmatrix}$$

- Zorientowana macierz incydencji C(G) grafu prostego to macierz $<c_{ij}>$, rozmiaru n*m, otrzymana z macierzy incydencji B(G) poprzez zastąpienie w każdej kolumnie jednej z dwu jedynek przez -1(minus jeden).

Macierz incydencji



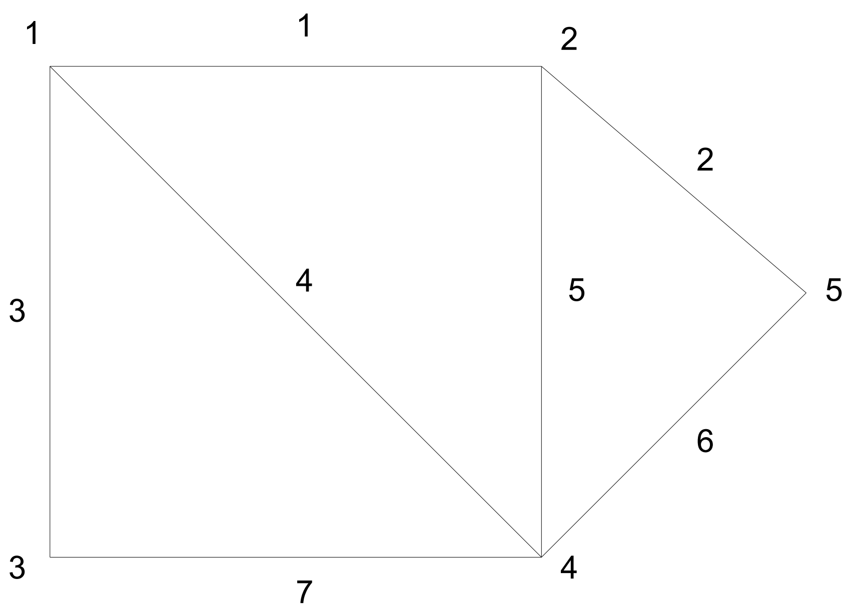
$$B(G)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(G)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz stopni

- Macierz stopni D(G) grafu G=({v_1,...,v_n},E) to diagonalna macierz <d_{ij}> rozmiaru n*n, gdzie

$$d_{ij}=\begin{cases} deg\, v_i \text{ jeżeli } i=j \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$



$$D(G)=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Jeśli G(V,E) jest grafem prostym to

$$B(G) * B(G)^T = D(G) + A(G)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$